Chapitre 3

annales

EXAMEN DU 5 octobre 2007 (durée 1h30).
Exercice 1 (5 points) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = x - ln(x) - 1/x.$$

1. (a) Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
   (b) Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
3. étudier les limites de la fonction f lorsque x tend vers 0 par valeurs positives et lorsque x tend vers $+\infty$. (pour la limite en 0 on pourra réduire l'expression de $f(x)$ au même dénominateur)
4. Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Exercice 2 (5 points)

1. On considère l'intégrale
$$I = \int_3^{+\infty} \frac{4}{x^2 - 4} dx$$
(remarquer que $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$) L'intégrale I est-elle convergente ? Si oui donner sa valeur.
2. On considère l'intégrale
$$J = \int_3^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - 4} dx.$$
L'intégrale J est-elle convergente ? Si oui donner sa valeur. (on pourra utiliser le changement de variable $u = x^2 - 4$).

Exercice 3 (10 points) la question 3 est indépendante de la question 2. la question 4b) est pratiquement indépendante des questions pécédentes.
On considère la fonction f définie par
$$f(x) = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

1. En utilisant l'inégalité stricte évidente : pour tout réel x, $x^2 < x^2 + 1$, montrer que : pour tout réel x, $-\sqrt{x^2 + 1} < x < \sqrt{x^2 + 1}$.
2. (a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et vérifier que
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$
   (b) Calculer l'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 f'(x)dx$$

(c) Calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

(poser $u = x^2 + 1$).

(d) Calculer l'intégrale

$$K = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 ln(x + \sqrt{x^2+1})dx$$

en utilisant une intégration par parties.

3. On pose $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. Déterminer les limites de la fonction g lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. En déduire les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction f est une bijection de $I\!R$ sur $I\!R$.

   (b) Soit y un réel fixé. Résoudre dans $I\!R$ l'équation $f(x) = y$ (expliciter x en fonction de y).

EXAMEN du 3 septembre 2008 (extraits).

Exercice 1 (environ 7 points) On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = (x^2 + x + 2)e^{-x}$

1. (a) Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
3. étudier les limites de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$.
4. En utilisant la méthode d' intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$

Exercice 2 (environ 5 points) les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{1+x}$.
   (b) Soit
   $$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx.$$
   L'i ntégrale I est-elle convergente ? Si oui donner sa valeur.
2. Soit
   $$J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x ln(x)^{3/2}}.$$
   L'intégrale J est-elle convergente ? Si oui donner sa valeur (on pourra utiliser le changement de variable $u = ln(x)$ en justifiant sa validité).

EXAMEN du 3 octobre 2008 (durée 1h30).

Exercice 1 Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On rappelle que pour tout réel x

$$x^{n/3} = (x^{1/3})^n = (x^n)^{1/3} \text{ et } (x^{n/3})^3 = x^n.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{6}x^{2/3} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) La fonction f est-elle continue en -1 ? en 1 ?
   (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
   (c) La fonction f est-elle convexe sur $]0, 1[$?concave sur $]0, 1[$?
   (d) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé.(unité = 2cm).
2. (a) Montrer que pour tout réel x l'intégrale $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge et donner sa valeur. On raisonnera selon les valeurs prises par x. La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
   (b) On note G la restriction de F à $[-1, 1]$. Montrer que la fonction G est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, 1]$. Déterminer $G^{-1}(y)$ pour $y \in [0, 1]$.

Exercice 2 Les questions 2,3,4,6,7a sont indépendantes. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x ln(1 + e^{-x}) \text{ et } g(x) = ln(1 + e^{-x}).$$

1. Justifier que les fonctions f et g sont de clase C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel y strictement positif déterminer $g^{-1}(y)$.
3. (a) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) En utilisant la notion de taux d'accroissement montrer que $\lim_{y \to 0} \dfrac{ln(1 + y}{y} = 1$ et en déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Soit t un réel strictement positif, calculer l'intégrale $G(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+e^{-x}}$ en utilisant le changement de variable $u = e^x$. (transformer $G(t)$ en multipliant par e^x le numérateur et le dénominateur de la fonction à intégrer).
5. (a) Soit t un réel strictement positif, calculer l'intégrale $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ en utilisant une intégration par parties. Vérifier que l'on peut écrire : $F(t) = f(t) - f(0) + g(-t) - g(0)$.
   (b) L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ est-elle convergente ? si oui donner sa valeur.
   (c) L'intégrale $J = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ est-elle convergente ? si oui donner sa valeur.
6. On considère la fonction ϕ définie sur $] - 1, +\infty[$ par $\phi(u) = (u + 1)ln(1 + u)$.
   (a) Montrer que ϕ est de classe C^2 et convexe sur $] - 1, +\infty[$.
   (b) Ecrire l'équation de la tangente au graphe de ϕ au point $u = 0$. Justifier que pour tout réel $u > -1$, $(u + 1)ln(1 + u) \geq u$.
   (c) En déduire que pour tout réel u strictement positif :
   $$\frac{1}{u}ln(1 + u) - \frac{1}{1 + u} \geq 0.$$
7. (a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
   (b) en utilisant l'inégalité du 6.c montrer que la fonction est une fonction monotone en précisant le sens de variations.

EXAMEN du 1 septembre 2009 (extraits).

Exercice 1 les questions 1 et 2a) sont indépendantes

1. (a) Etudier la convexité ou la concavité de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = ln(x)$.
   (b) Ecrire l'équation de la tangente au graphe g au point d'abscisse $x = 1$.
   (c) En déduire pour tout réel x strictement positif le signe de $1 + ln(x) - x$.
2. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x^2 ln(x) + x^{3/2}$. On admet que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.
   (a) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) La fonction f est-elle convexe sur $]0,+\infty[$?conceve sur $]0,+\infty[$?

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2/2} - x$.

1. (a) Justifier que f est de classe C^2. Etudier le signe de f'' selon les valeurs de x. En déduire les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est convexe ou concave.
   (b) En déduire le tableau de variations de f'. On donne $e^{-1/2} \sim 0.6$. On détaillera le raisonnement pour $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.
   (c) En déduire le tableau de variations de f. On détaillera le raisonnement pour $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que l'équation $e^{-x^2/2} = x$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$. On notera x_0 cette solution.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) + x$. Que peut-on en déduire pour la droite d'équation $y = -x$?
   (c) Faire une représentation graphique de f dans un repère orthonormé en prenant comme unité 2 cm et lire sur ce graphique une valeur approchée de x_0.

EXAMEN du 17 octobre 2009 .

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $I\!R$ par : pour tout réel x $f(x) = x^2 e^{-x/2}$.

1. Montrer que la fonction f est C^2 sur $I\!R$.
2. Etudier les limites de la fonction f quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
3. Déterminer le tableau de variations de f.
4. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
5. Pour tout réel x non nul on pose $g(x) = f(1/x)$. Etudier les limites à droite et à gauche de la fonction g lorsque x tend vers 0.

Exercice 2 (environ 7 points) les trois questions sont iondépendantes.

1. Pour $a > 1$, on considère l'intégrale $I(a) = \int_a^{a^2} \frac{dx}{xln(x)}$.
   (a) Justifier que la fonction à intégrer est bien continue sur $[a, a^2]$.
   (b) Calculer $I(a)$ en utilisant le changement de variable $u = ln(x)$. Vérifier que la valeur de $I(a)$ ne dépend pas de a.
2. Pour $a > 1$, on considère l'intégrale $J(a) = \int_{1/a}^{a} \frac{ln(x)}{1+x^2} dx = \int_{1/a}^{a} \frac{ln(x)}{1+1/x^2} \frac{dx}{x^2}$. En utilisant la deuxième écriture de $J(a)$, effectuer le changement de variable $u = 1/x$ et montrer que $J(a) = -J(a)$. En déduire la valeur de $J(a)$.
3. On considère l'intégrale $I(a) = \int_1^{+\infty} \frac{ln(x+1)}{x^2} dx$. Etudier la convergence de K en utilisant une intégrations par parties. On utilisera le moment venu : $\forall x > 0$, $\frac{1}{x(x*1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$.

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $I\!R$ par : pour tout réel x $f(x) = e^{-|x|}$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $I\!R$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$ converge et donner sa valeur.
3. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_{+\infty}^{x} e^{-|u|} du$. Justifier que F est une primitive de f et déterminer $F(x)$ pour $x \leq 0$ et $x > 0$.
4. (a) Montrer que F est une bijection de $I\!R$ dans $F(I\!R)$. Déterminer $F(I\!R)$.
   (b) Pour tout y de $F(I\!R)$, déterminer $F^{-1}(y)$.

EXAMEN du 1 septembre 2010.

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $I\!R$ par : pour tout réel x : $f(x) = e^{1/x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$..

1. Montrer que la fonction f est C^2 sur $I\!R^*$.
2. Montrer que la fonction f est continue à gauche en 0.
3. (a) Pour tout $x \neq 02$, calculer $f'(x)$.
   (b) Ecrire le taux d'accroissement de f en 0 et montrer que f est dérivable à gauche en 0.
4. (a) Etudier les limites de f lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier que pour tout réel x on a $f(x) \neq 1$.
   (b) Déterminer le tableau de variations de f.
5. (a) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   (b) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = -1$. En déduire que pour tout réel $x < -1/2$, on a $e^{1/x} \leq -x/e$.
6. (a) On appelle g la restriction de f à $]0, +\infty[$. c'est-à-dire pour tout réel $x > 0$, $g(x) = f(x) = e^{1/x}$. Montrer que g est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[)$. Déterminer $g(]0, +\infty[)$.
   (b) Pour tout y de $g(]0, +\infty[)$, déterminer $g^{-1}(y)$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $I\!R$ par : pour tout réel x : $f(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $I\!R$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et donner sa valeur.
3. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$. Déterminer $F(x)$ pour $x \leq 0$ et $x > 0$.

Exercice 3 Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 x^2 e^x dx$ en utilisant deux intégrations par parties successives.
   (b) Calculer l'intégrale $J = \int_1^4 \frac{xe^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$ en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{x}$.
2. (a) En utilisant une intégration par partie sur l'intégrale partielle montrer que l'intégrale $K = \int_1^{+\infty} \frac{ln(x)}{x^{5/2}} dx$ converge et donner sa valeur.
   (b) En utilisant le changement de variable $u = x^2$ montrer que l'intégrale $L = \int_1^{+\infty} \frac{xln(x^2)}{x^5} dx$ converge et donner sa valeur.