Chapitre 4

annales corrigés

EXAMEN DU 5 octobre 2007 (durée 1h30).
Exercice 1

1. (a) La fonction f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ (fonctions usuelles : ln et puissance).
   (b) Pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 - 1/x + 1/x^2$ et $f''(x) = 1/x^2 - 2/x^3 = \frac{x-2}{x^3}$.
2. f'' est du signe de $x-2$ donc f est concave sur $]0,2]$ et convexe sur $[2,+\infty[$.
3. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{x^2 - xlnx - 1}{x}$. Or par croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+} xlnx = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} x^2 - xlnx - 1 = -1$ donc par quotient de limites $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Par ailleurs pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x(1 - ln(x)/x - 1/x^2)$. Or par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} lnx/x = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} 1 - ln(x)/x - 1/x^2 = 1$ donc par produit de limites $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. La dérivée f' est du signe de $x^2 - x + 1$ qui est un trinôme sans racines réelles puisque le discriminant est strictement négatif, on en déduit que ce trinôme est du signe du coefficient de x^2 donc strictement positif. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle est continue car de classe C^1 donc que f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$ d'après les questions précédentes.

Exercice 2 (5 points)

1. La fonction $x \mapsto \frac{4}{x^2-4}$ est continue sur $[3,+\infty[$. On étudie l'intégrale partielle pour $t \geq 3$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_3^{+\infty} \frac{4}{x^2-4}dx \\ &= \int_3^{+\infty} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}dx \\ &= [ln(|x-2|) - ln(|x+2|)]_3^t \\ &= ln(\frac{t-2}{t+2}) - ln(1/5). \end{aligned}$$

   Or $\lim_{t\to+\infty} \frac{t-2}{t+2} = 1$ donc par composition de limites $\lim_{t\to+\infty} ln(\frac{t-2}{t+2}) = ln(1) = 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} F(t) = ln(5)$. Par conséquent l'intégrale I est convergente et $I = ln(5)$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2-4}$ est continue sur $[3,+\infty[$. On considère le changement de variable $u = x^2 - 4 = g(x)$, la fonction g est de classe C^1 en tant que polynômes et strictement croissante sur $[3,+\infty[$. L'intégrale J devient

$$J = \int_5^{+\infty} du/u$$

   L'intégrale partielle associée à K s'écrit pour $t \geq 5$

$$F(t) = \int_5^t du/u = ln(t) - ln(5)$$

et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ donc l'intégrale K diverge et par suite l'intégrale J diverge aussi.

Exercice 3 (10 points)

$$f(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

1. Comme pour tout réel x, $0 \le x^2 < x^2+1$ et comme la fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x| < \sqrt{x^2+1}$$
soit
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}.$$

2. (a) De l'inégalité ci-dessus, on tire
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0.$$
donc f est définie sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \sqrt{x^2+1}$. Comme $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et est strictement positive et comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables. De plus $x \mapsto x + g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables et est à valeurs strictement positives. Enfin $x \mapsto ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables. Pour tout réel x,
$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
(b) On a
$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = ln(1+\sqrt{2}).$$
(c) On pose le changement de variable $u = x^2+1 = g(x)$, g est de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc
$$J = 1/2 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}} du = [\sqrt{u}]_1^2 = \sqrt{2} - 1.$$
(d) On pose $u(x) = f(x)$ et $v(x) = x$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, on obtient
$$K = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = f(1) - J = ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1.$$

3. On a $\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ par composition de limites et par somme de limites $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
En $-\infty$ on utilise la quantité conjuguée, pour $x < 0$
$$g(x) = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}}.$$
Comme $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2+1} = -\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0^+$. Par composition de limites, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ln(g(x)) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ln(g(x)) = +\infty$

4. (a) La dérivée de f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable, on en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(b) On sait que l'équation $f(x) = y$ a une unique solution pour tout réel y donné d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
ln(x + \sqrt{x^2+1}) &= y \\
x + \sqrt{x^2+1} &= e^y \\
\sqrt{x^2+1} &= e^y - x \\
x^2 + 1 &= (e^y - x)^2 \\
x^2 + 1 &= e^{2y} - 2e^y x + x^2 \\
x &= \frac{e^{2y}-1}{2e^y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.
\end{aligned}$$

corrigé de l'EXAMEN du 3 septembre 2008 (extraits).
Exercice 1 (environ 7 points)

1. (a) La fonction f est de classe C^2 sur $I\!R$. comme produit de telles fonctions : polynôme et exponentielle.
   (b) Pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 + x - 1)e^{-x}$ et $f''(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$.
2. On étudie le signe de f'' c'est-à-dire le signe du trinôme $x^2 - 3x + 2$. On en déduit que f'' est positive sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$ et f'' est négative sur $[1, 2]$. On en conclut que f est convexe sur $]-\infty, 1]$, convexe sur $[2, +\infty[$ et f est concave sur $[1, 2]$.
3. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   Par contre il y a une forme indéterminée pour la limite en $+\infty$, on a
   $$\forall x \in I\!R, \quad f(x) = \frac{x^2(1 + 1/x + 2/x^2)}{e^x} = \frac{x^2}{e^x}(1 + 1/x + 2/x^2).$$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + 1/x + 2/x^2) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. On intègre deux fois successivement par parties et on obtient $I = -9/e + 5$.

Exercice 2 (environ 5 points)

1. (a) On trouve $a = b = 1$.
   (b) L'intégrale partielle s'écrit pour $t > 1$
   $$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} dx = [ln(x) - ln(x+1)]_1^t = ln(\frac{t}{t+1}) + ln(2).$$
   $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = ln(2)$ donc l'intégrale I est convergente et vaut $ln(2)$.
2. On utilise le changement de variable $u = ln(x)$, la fonction u est C^1 et strictement monotone sur $[2, +\infty[$. J devient $K = \int_{ln(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$. L'intégrale partielle associée à K est $G(t) = \int_{ln(2)}^{t} \frac{du}{u^{3/2}} = [\frac{u^{-1/2}}{-1/2}]_{ln(2)}^t = \frac{-2}{\sqrt{t}} + \frac{2}{\sqrt{ln(2)}}$
   donc $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t) = \frac{2}{\sqrt{ln(2)}}$ donc K converge et J aussi et $J = \frac{2}{\sqrt{ln(2)}}$.

corrigé de l'EXAMEN du 3 octobre 2008 (durée 1h30).
Exercice 1

1. (a) On a $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 5/6(-1^{2/3} = 5/6((-1)^2)^{1/3} = 5/6$ donc la fonction f n'est pas continue en -1. De même $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 5/6(1^{2/3} = 5/6((-1)^2)^{1/3}5/6$ donc la fonction f n'est pas continue en 1.
   (b) Le taux d'accroissement de f en 0 s'écrit $\frac{f(x)-f(0)}{x} = 5/6\frac{1}{x^{1/3}}$ car $f(0) = 0$. Donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$. Ceci suffit pour dire que f n'est pas dérivable en 0.
   (c) La fonction f est de classe C^2 sur $]0, 1[$ comme fonction puissance.
$$\forall x \in]0, 1[, \;\; f'(x) = 5/9\frac{1}{x^{1/3}}$$
et
$$\forall x \in]0, 1[, \;\; f''(x) = -5/527)\frac{1}{x^{4/3}} < 0$$
donc la fonction f est concave sur $]0, 1[$.
   (d) La dérivée f' est négative sur $]-1, 0[$ et positive sur $]0, 1[$. La courbe est tangente à l'axe $0y$ pour $x = 0$ car le taux d'accroisement a une limite infinie.
2. (a) f est continue par morceaux sur $I\!R$ puisqu'elle admet des limites à gauche et à droite finies aux deux points de discontinuité.
   – Si $x < -1$, f est nulle sur $]-\infty, x]$ donc $F(x)$ converge et vaut 0.
   – Si $-1 \le x \le 1$, sous réserve de convergence
$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x} 5/6t^{2/3}dt = \int_{-1}^{x} 5/6t^{2/3}dt = 5/6[\frac{t^{2/3+1}}{5/3}]_{-1}^{x} = 1/2(x^{5/3} + 1).$$
   En particulier $F(1) = 1$, donc l'intégrale converge pour $x \in [-1, 1]$.
   – Si $x > 1$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{x} 0dt = F(1) = 1$$
Par conséquent pour tout réel x l'intégrale $F(x)$ converge et
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x^{5/3} + 1) & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
La fonction F est continue sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ $]1, +\infty[$ comme fonction constante ou puissance. De plus $\lim_{x\to -1^-} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to -1^+} F(x) = \frac{1}{2}((-1)^{5/3} + 1) = 0$ donc F est continue pour $x = -1$. $\lim_{x\to 1^+} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{1}{2}((1)^{5/3} + 1) = 1$ donc F est continue pour $x = 1$. Donc F est continue sur $I\!R$.
   (b) F étant continue sur $I\!R$, F est continue sur $[-1, 1]$ donc G est continue sur $[-1, 1]$. On a
$$\forall x \in [-1, 1], \;\; G(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$$
donc G est une primitive de f sur $[-1, 1]$. Par suite
$$\forall x \in [-1, 1], \;\; G'(x) = f(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} \ge 0$$
Comme G' ne s'annule que pour $x = 0$, on en déduit que G est strictement croisante sur $[-1, 1]$. On en conclut la fonction G est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[G(-1), G(1)] = [0, 1]$. Soit $y \in [0, 1]$, posons $x = G^{-1}(y)$ alors $y = G(x)$ soit $y = \frac{1}{2}(x^{5/3} + 1)$ d'où $2y = (x^{5/3} + 1)$ donc $x = (2y - 1)^{3/5}$. Donc
$$\forall y \in [0, 1], \;\; G^{-1}(y) = (2y - 1)^{3/5}$$

Exercice 2

1. Les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto 1+e^{-x}$ sont de classe c^2 sur $\mathbb{R}$ comme fonction usuelle, quotient et somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto ln(u)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, comme pour tout réel x, $1+e^{-x}>0$, la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composition. La fonction f en tant que produit de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. On a $g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} < 0$, g est donc continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. La fonction g est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. Soit un réel y strictement positif, on a $x = g^{-1}(y)$ soit $y = g(x) = ln(1+e^{-x})$ soit $e^y = 1+e^{-x}$ donc $x = -ln(e^y-1)$. Donc
$$\forall y>0,\ \ g^{-1}(y) = -ln(e^y-1).$$
3. (a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et pour tout réel x
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x ln(e^{-x}(1+e^x)) \\ &= e^x(ln(e^{-x}) + ln(1+e^x) \\ &= -xe^x + e^x ln(1+e^x) \end{aligned}$$
Or par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x ln(1+e^x) = 0$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   (b) Pour tout réel y non nul, $\frac{ln(1+y)}{y}$ est le taux d'accroissement de $y \mapsto h(y) = ln(1+y)$. Or cette fonction h est dérivable et $h'(y) = \frac{1}{1+y}$ d'où $h'(0) = 1$. On en conclut que $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{ln(1+y)}{y} = 1$. Pour tout réel x : $f(x) = \frac{ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc par composition de limites, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
4. On utilise le changement de variable $u = e^x$, la fonction u étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On obtient
$$G(t) = \int_1^{e^t} \frac{du}{1+u} = [ln(1+u)]_1^{e^t} = ln(1+e^t) - ln(2) = g(-t) - g(0)$$
5. (a) On pose $u(x) = ln(1+e^{-x})$ et $v(x) = e^x$, les fonctions u et v ont de classe C^1 sur $[0,t]$ pour tout t réel strictement positif, on obtient
$$F(t) = [e^x ln(1+e^{-x})]_0^t - \int_0^t \frac{-e^{-x}e^x}{1+e^{-x}} dt = f(t) - f(0) + G(t)$$
Par conséquent, pour tout t réel strictement positif,
$$F(t) = f(t) - f(0) + g(-t) - g(0).$$

   (b) $F(t)$ est l'intégrale partielle associée à l'intégrale généralisée. Or $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$ et comme $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = +\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} g(-t) = +\infty$. Par suite $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ donc $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

   (c) L'intégrale partielle associée à J est $\int_t^{-\infty} f(x)dx = -F(t) = -f(t) + f(0) - g(-t) + g(0)$. Or $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, donc $\lim\limits_{t\to-\infty} g(-t) = 0$. Par ailleurs $f(0) = g(0) = ln(2)$. Donc J est convergente et vaut $2ln(2)$.
6. (a) La fonction $u \mapsto u+1$ est de classe C^2 sur $]-1,+\infty[$ en tant que polynôme et est à valeurs dans $]0,+\infty[$. La fonction $u \mapsto ln(u+1)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ par composition. Donc la fonction ϕ est de classe C^2 sur $]-1,+\infty[$ comme produit de fonctions C^2 sur ce même intervalle. De plus pour tout réel $u>-1$, $\phi'u) = ln(1+u)+1$ et $\phi''(u) = \frac{1}{1+u} > 0$ donc ϕ est convexe sur $]-1,+\infty[$.

(b) L'équation de la tangente au graphe de ϕ au point $u = 0$ est $y = \phi(0) + u\phi'(0) = u$. Comme ϕ est convexe, le graphe de ϕ est au-dessus de toutes ses tangentes donc $\forall u \geq -1$, $\phi(u) \geq u$ soit $(u+1)ln(1+u) \geq u$.

(c) Pour tout réel u strictement positif : $\frac{1}{u(1+u)} > 0$, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité précédente par $\frac{1}{u(1+u)}$ d'où

$$\frac{1}{u}ln(1+u) - \frac{1}{1+u} \geq 0.$$

7. (a) Pour tout réel x, $f(x) = e^x g(x)$ donc

$$f'(x) = e^x g(x) + e^x g'(x) = e^x ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

(b) On peut aussi écrire

$$\forall x \in I\!R,\ \ f'(x) = \frac{1}{e^{-x}}ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Or $e^{-x} > 0$ donc en posant $u = e^{-x}$, on obtient $f'(x) \geq 0$ donc la fonction est une fonction croissante sur $I\!R$.