Solutions TD 9

Exercice 2.14
On regarde le graph dans la figure 1 pour l'ensemble $\mathcal{C}$.

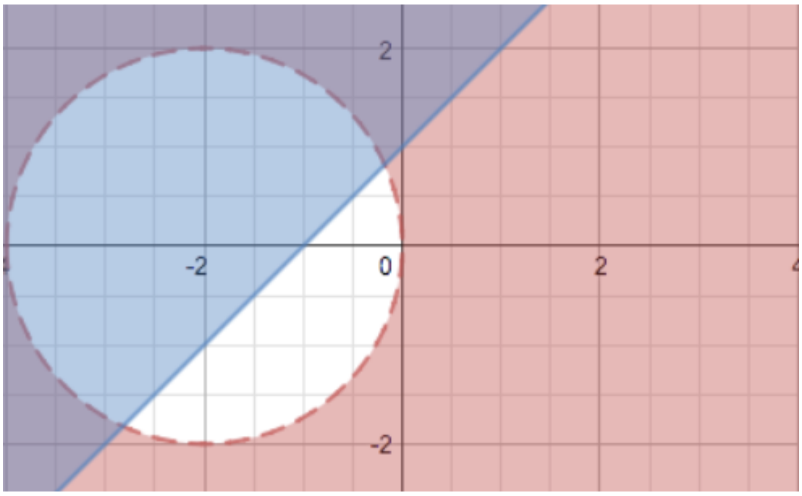

Figure 1: Ex.2.14, l'ensemble $\mathcal{C}$ est l'intersection entre le complémentaire du disque (en orange) et le demi-plan en violet, il est donc composé des points qui sont à dans le demi-plan $x - y \leq -1$ mais pas à l'intérieur de la boule $\mathrm{B}((-2,0);2)$. Il est ni ouvert ni fermé, donc pas borné.

Exercice 1.41, convexité

1. $\mathcal{A}$ n'est pas convexe, les points $(0,0)$ et $(-1,-1)$ sont dans $\mathcal{A}$ mais pas leur milieu $(-1/2,-1/2)$
2. $\mathcal{B}$ n'est pas convexe, les points $(1,0)$ et $(1,-4)$ sont dans $\mathcal{B}$ mais pas leur milieu $(1,-2)$, en effet $(1-1)^2+(-2+2)^2 = 0$
3. $\mathcal{C}$ est convexe, car intersection des deux boules.
4. $\mathcal{D}$ n'est pas convexe, en effet les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont dans $\mathcal{D}$ pas leur milieu O.
5. $\mathcal{E}$ est l'intersection de demi-plan, donc convexe

Exercice 2.20
On regarde le graphs dans la figure 2 pour l'ensemble $\mathcal{A}$,

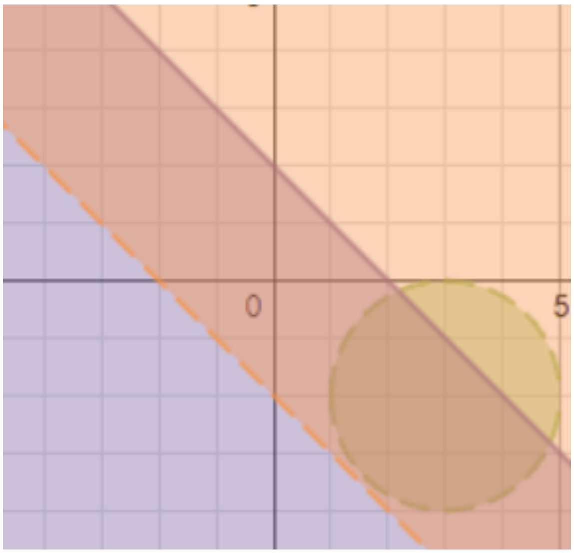

Figure 2: Ex.2.20, $\mathcal{A}$ est la region foncée intersection du disque ouvert et la bande delimitée par le deux droites, elle est donc composé des points qui sont à la fois dans la boule de rayon 2, strictement au-dessus de la droite d'équation $y = -x - 2$, et sur ou dessous de la droite d'équation $y = -x + 2$. C'est un ensemble borné puisqu'il est contenu dans la boule de centre $(3, -2)$ et de rayon 2. Mais il est ni fermé ni ouvert, donc pas compact, car il contient les points de son bord sur la droite $y = -x + 2$, mais pas ceux sur le cercle d'équation $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$. C'est un convexe car intersection de trois ensembles convexes (prop. 13.5), une boule et deux demi-plan.

.

Figure 3 pour l'ensemble $\mathcal{B}$

Figure 3: Ex.2.20, $\mathcal{B}$ est la region réunion des deux plans, il est donc composé soit des points dont la deuxieme cordonée est positive ou nulle, soit des points situés strictement au-dessous de la droite $y = -1/2x - 1/2$. Il est ni ouvert ni fermé et pas borné, donc pas compact. On remarque que la rúnion des convxes n'est pas nécessariement convexe. $\mathcal{B}$ n'est pas convexe car si on prendre les points $A = (4, 0)$ et $B = (0, -1)$ appartenant è $\mathcal{B}$ le point du milieu $\frac{A+B}{2} = (2, -1) \notin \mathcal{B}$

Figure 4, pour l'ensemble $\mathcal{C}$:

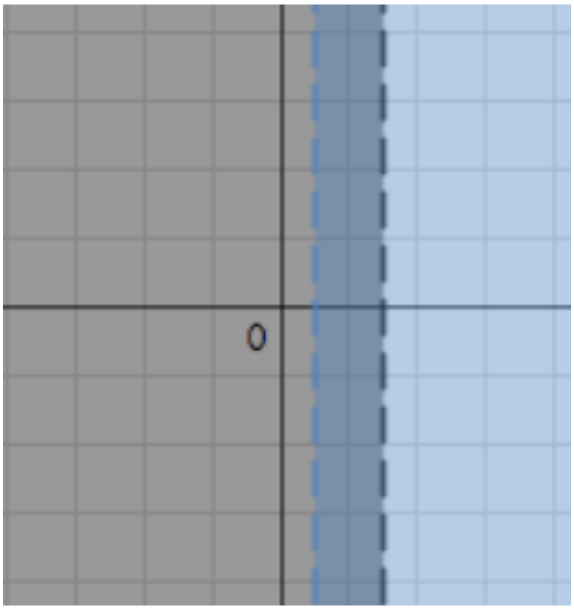

Figure 4: Ex.2.20, $\mathcal{C}$ est la region foncée intersection entre les deux plans, c'est composé des points (x, y) tels que $1/2 < X < 3/2$. C'est ouvert, car les points du bord, c'est-à-dire les droites $x = 1/2$ et $x = 3/2$ n'appartient pas à l'ensemble. Il n'est pas borné, car la droite déquation $x = 1$ est incluse dans $\mathcal{C}$, donc il n'est pas compact. L'ensemble $\mathcal{C}$ est convexe, car intersection des ensembles convexes (prop. 13.6), de deux demi-plan, qui sont convexes (prop. 13.5).

Exercice 1.43 On montre que l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ n'est pas convexe.

Soient $A = (x_a, y_a)$ et $B = (x_b, y_b)$ deux points de $\mathcal{E}$ donc

$$x_a y_a \geq 0 \text{ et } x_b y_b \geq 0$$

on vérifie que $M = (x_m, y_m)$ combinaison convexe de A et B, c'est-à-dire $x_m = (1-t)x_a + tx_b$ et $y_m = (1-t)y_a + ty_b$, n'est pas dans $\mathcal{E}$, donc

$$x_m y_m = [(1-t)x_a + tx_b][(1-t)y_a + ty_b] = (1-t)^2 x_a y_a + t^2 x_b y_b + t(1-t)[x_a y_b + x_b y_a] < 0$$

pour quelque valeurs de x_a, x_b, y_a, y_b. On fixe $t = 1/2$, donc

$$\frac{1}{4}x_a y_a + \frac{1}{4}x_b y_b + \frac{1}{4}[x_a y_b + x_b y_a] < 0$$

ou

$$(x_a + x_b)(y_a + y_b) < 0$$

qui est vérifié pour $(x_a + x_b) > 0$ et $(y_a + y_b) < 0$.Si on choisit $x_b > -x_a$ et $y_b < -y_a$ on obtient un point qui est pas dans $\mathcal{E}$, par example si on prendre les deux points $A = (1, 1)$ et $B = (-1/2, -2)$ on a que $M = (1/4, -2)$ qui est pas dans $\mathcal{E}$.

Exercice 1.44 L'ensemble des consommations possible est l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, px + qy \leq R\}$$

1. $\mathcal{E}$ est convexe.

   Si on prend deux points $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) \in \mathcal{E}$ et leur combinaison convexe $M = ((1-t)x_a + tx_b, (1-t)y_a + ty_b)$ on montre que $M \in \mathcal{E}$: c'est trivial que $(1-t)x_a + tx_b \geq 0$ et $(1-t)y_a + ty_b) \geq 0$, car $x_a \geq 0$,$y_a \geq 0$,$x_b \geq 0$,$y_b \geq 0$, $t \in [0,1]$, donc il reste à montrer que

   $$p[(1-t)x_a + tx_b] + q[(1-t)y_a + ty_b)] \leq R$$

   en effet

   $$(1-t)[px_a + qy_a] + t[px_b + qy_b] \leq (1-t)R + tR = R$$

   donc $M \in \mathcal{E}$.

2. $\mathcal{E}$ est borné. $\mathcal{E}$ est l'ensemble delimité par le triangle $(0,0),(0,R/q),(R/p,0)$, donc il est borné par le rectangle $|x| \leq R/q$ et $|y| \leq R/p$

Exercice 1.45

1. On regarde la figure 5 pour la représentation géométrique et on montre que $\mathcal{E}_1$ est convexe. Soient $A = (x_a, x_b)$ et $B = (x_a, x_b)$ deux points de $\mathcal{E}_1$, alors $M = ((1-t)x_a + tx_b, (1-t)y_a + ty_b)$ est dans $\mathcal{E}_1$:

   $$|2[(1-t)x_a + tx_b] + 3| < (1-t)y_a + ty_b$$

   première inégalité:

   $$2[(1-t)x_a + tx_b] + 3 < (1-t)(y_a - 3) + t(y_b - 3) + 3 = (1-t)y_a + ty_b$$

   deuxième inégalité:

   $$2[(1-t)x_a + tx_b] + 3 > -(1-t)(y_a - 3) - t(y_b - 3) = -[(1-t)y_a + ty_b]$$

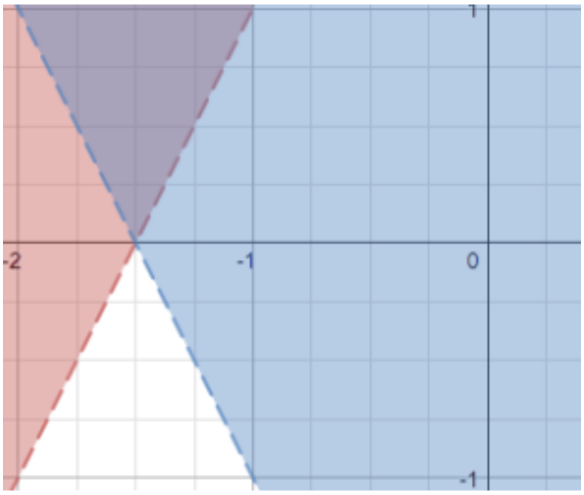

Figure 5: Ex.1.45, $\mathcal{E}_1$ est la region intersection entre les deux demi-plans en violet

2. On regarde la figure 6 pour la représentation géométrique et on sait que $\mathcal{E}_2$ est convexe, car toute boule de $\mathbb{R}^2$ (ouverte ou fermée) est convexe (prop. 13.5).

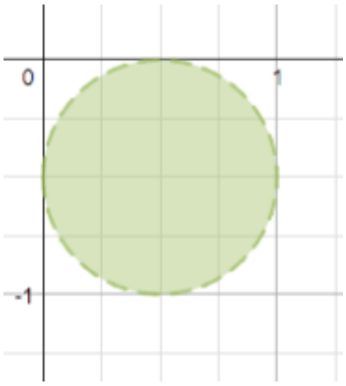

Figure 6: Ex.1.45, $\mathcal{E}_2$ est le disque centré en $(1/2, -1/2)$ et de rayon $r = 1/2$