Solutions TD 5

Exercice 2.4

1. f est définie sur tout $\mathbb{R}$, est continue et strictement monotone sur $[-1,+\infty[$, rf́egarder la représentation graphique de la fonction (Figure 1) ou regarder le signe de la dérivée, donc bijective. On inverse la relation

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

et on obtient

$$x = -1 \pm \sqrt{y^{-2}-1}.$$

$f^{-1} : [-1,0[\cup]0,1[\to [-1,+\infty[$.

2. Le dénveloppement limité de f à l'ordre 1 au point 2 est

$$f(x) = f(2)+f'(2)(x-2)+(x-2)\epsilon(x-2) = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{10^{3/2}}(x-2)+(x-2)\epsilon(x-2)$$

où on a utilise la dérivée

$$f'(x) = -\frac{(x+1)}{(x^2+2x+2)^{3/2}}$$

$f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [-1,+\infty[$ donc strictement décroissante.

Exercice 2.49

1. On calcule le dérivée première et seconde:

$$\phi'(u) = e^{-u^2/2}(1-u^2)$$

continue sur $\mathbb{R}$, et

$$\phi''(u) = e^{-u^2/2}(u^3-3u)$$

aussi continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que le produit et la somme de fonctions continues est une fonction continue (vrai aussi pour la composition).

2. Les points critiques sont tels que $\phi'(u) = 0$ donc $u \in \{-1,1\}$, pour vérifier s'ils sont des extrema on regarde le signe de $\phi'(u)$, donc de $(1-u^2)$ dans les intervalles de monotonie.

Pour $u \in]-\infty,-1[$, $\phi'(u) < 0$, donc ϕ est monotone décroissante. Pour $u \in]-1,1[$, $\phi'(u) > 0$, donc ϕ est monotone croissante. Alors $\phi(-1) = -e^{-1/2}$ est le minimum. Etant la fonction impaire on peut déjà conclure pour symétrie que $\phi(1) = e^{1/2}$ est le maximum.

Pour

$$\lim_{u\to\pm\infty} \phi(u) = 0$$

les extrema sont alors globales.

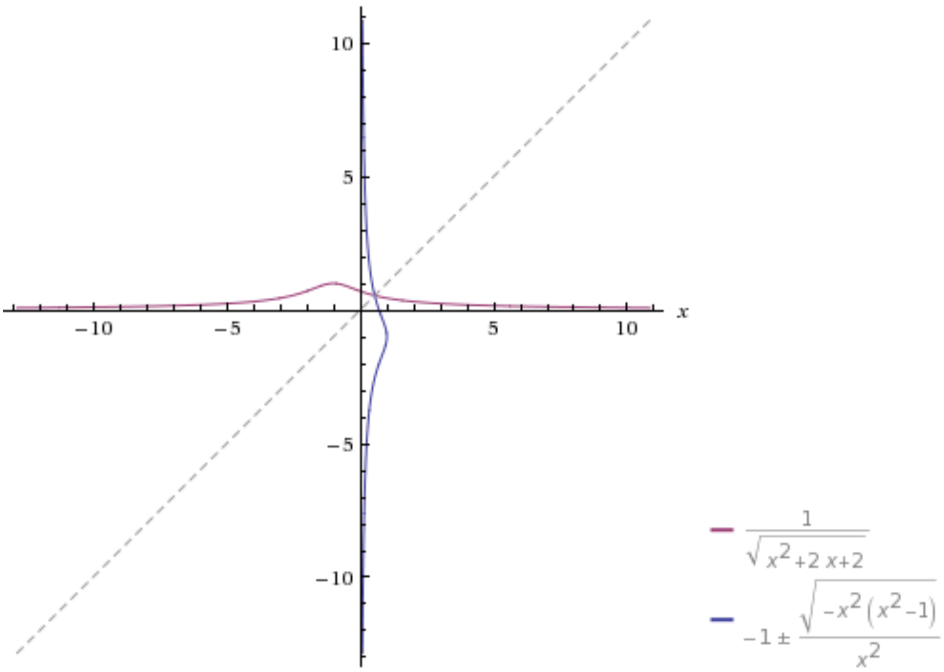

Figure 1: Ex.2.4: $f(x)$ et sa réciproque

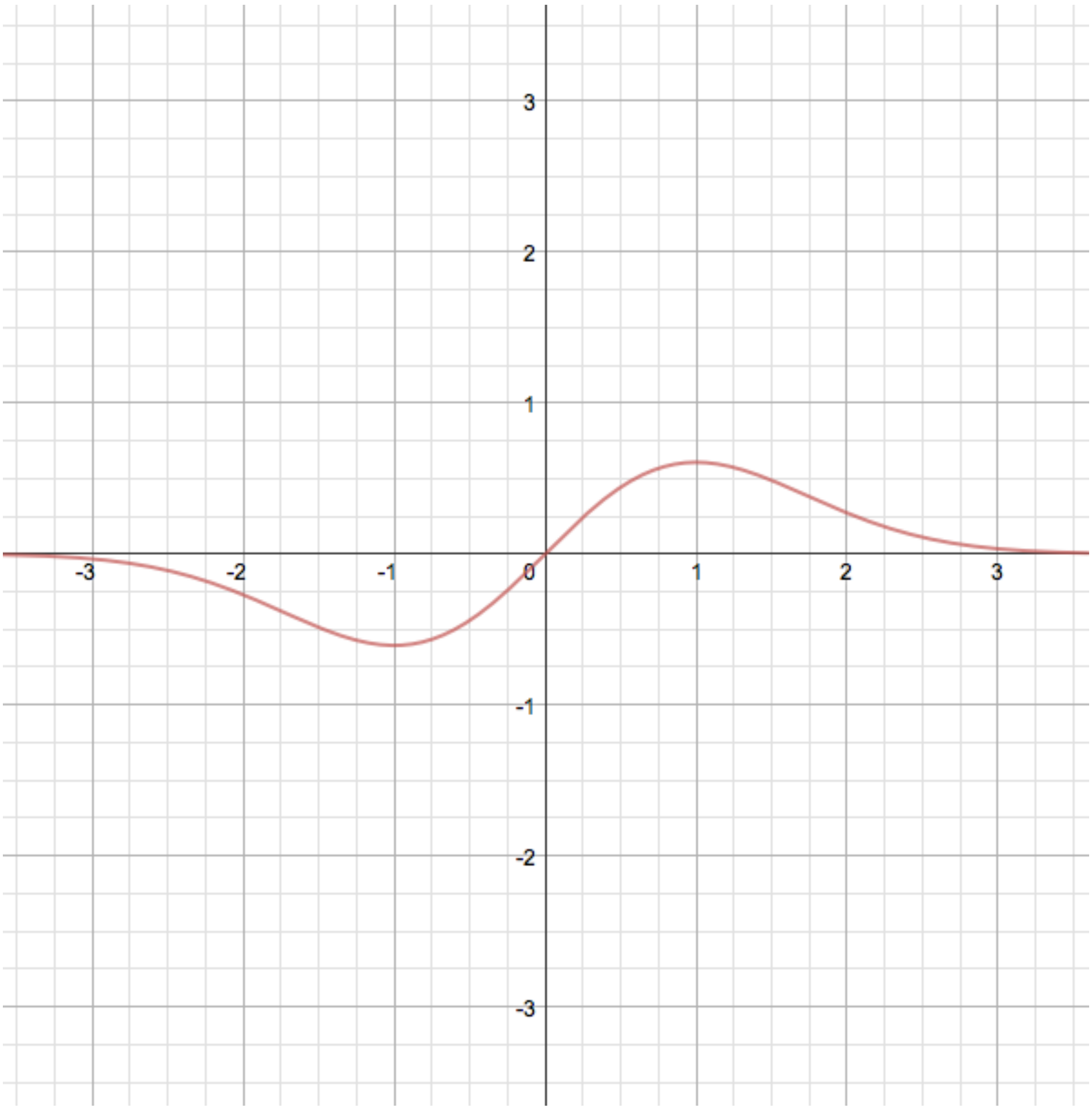

Figure 2: Ex.2.49: graph de $\phi(u)$

3. On rappelle le critère de convexité: f est convexe sur I si $f'(x)$ est croissante sur I, donc on regarde les intervalles oú $\phi'' > 0$.

$$\phi''(u) > 0 \implies u \in]-\sqrt{3}, 0[\text{ ou }]\sqrt{3}, +\infty[$$

Le plus grand intervalle sur lequel ϕ est convexe est $]\sqrt{3}, +\infty[$.

Exercice 1.34

Le domaine de d́finition de $f(x)$ est $\mathbb{R}$.. Pour trouver les points critiques, il faut dériver $f(x)$ et trouver x tels que $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

alors on cherche les solutions de l'equation $x^2 - 2x - 3 = 0$, donc

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = -1 \text{ et } 3.$$

Les points critiques sont alors $\{-1, 3\}$.

On étude le signe de $f'(x)$ dans les régions de monotonie de la fonction: pour $-\infty < x < -1$, $f'(x) > 0$ donc f est monotone croissante, pour $-1 < x < 3$ $f'(x) < 0$ donc est monotone décroissant donc $f(-1) = 7$ est un maximum, et enfin pour $3 < x < \infty$ $f'(x) > 0$ donc $f(3) = -25$ est le minimum.

Autrement on regarde le signe de la dérivée seconde $f''(x) = 3(x - 1)$ dans les points critiques $f''(-1) = -12 < 0$ donc $x = -1$ c'est un maximum local et $f''(3) = 12 > 0$, donc c'est un minimum local.

La fonction a limites $\pm\infty$ pour $x \to \pm\infty$, donc ils ne sont pas maximum/minimum globals.

Exercice 1.35

La fonction $g(x)$ est définie pour $x > 0$. Les points critiques sont tels que $g'(x) = 0$, donc

$$g'(x) = e^x + \ln(x) - e$$

$x = 1$ est le seul point critique. Pour $0 < x < 1$ $g'(x) < 0$, par exemple $f'(0.5) = -1.76$ ($e^x - e < 0$ et $ln(x) < 0$), alors $g(x)$ est monotone décroissante, et pour $1 < x < \infty$ $g'(x) > 0$, ainsi $g(x)$ est monotone croissante, alors $x = -1$ est un minimum global,

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

. La dérivé seconde est

$$g''(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

toujours positive dans l'ensemble de définition donc g est convexe.

Figure 3: Ex.1.34: graph de $f(x)$

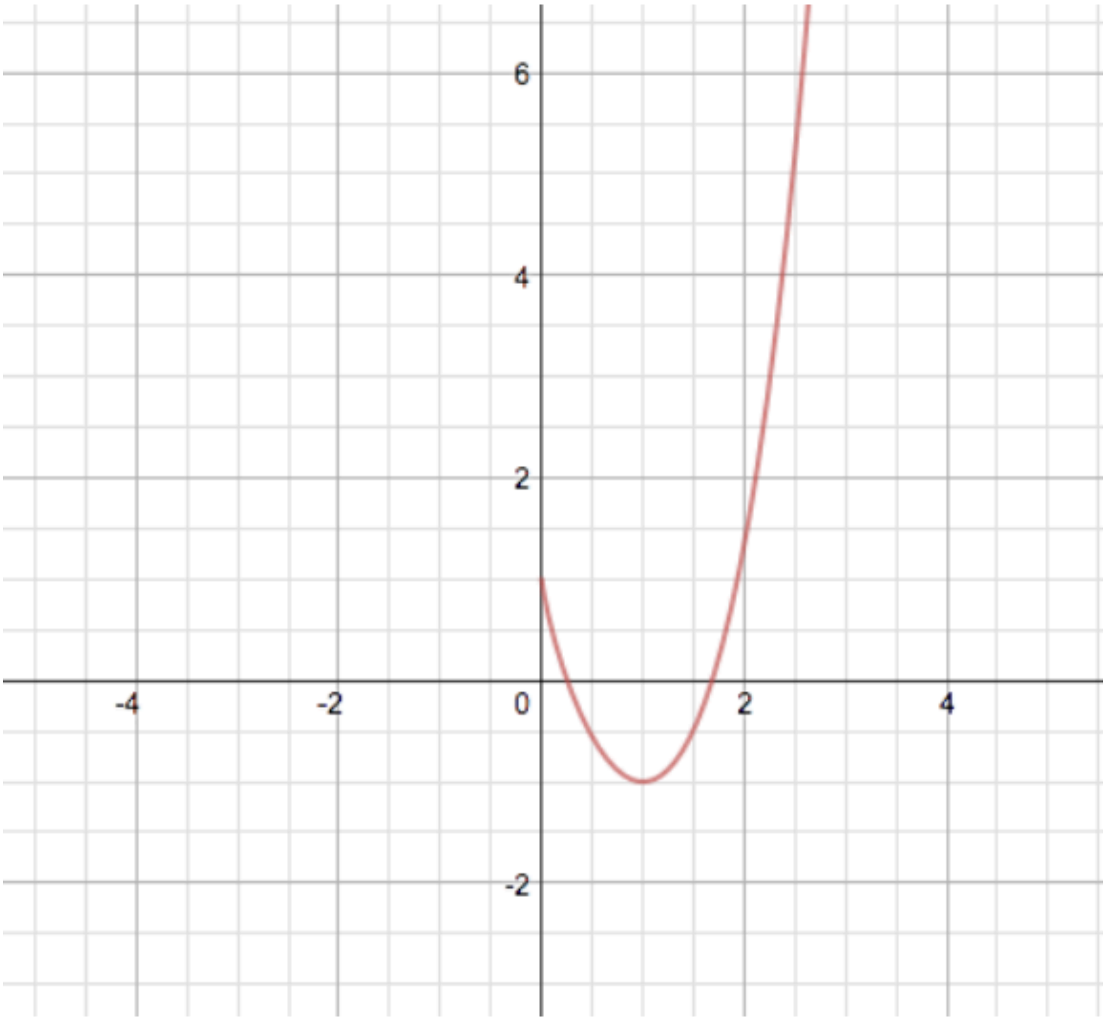

Figure 4: Ex.1.35: graph de $g(x)$