Solutions TD 4

Exercice 1.32

1. f est produit des fonctions classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

2. On calcule les trois premières dérivées

$$f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$
$$f''(x) = -\frac{5-6\ln(x)}{x^4}$$
$$f'''(x) = \frac{26-24\ln(x)}{x^5}$$

Le développement limité d'ordre 2 en $x_0 = 1$ est

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)^2\frac{f''(1)}{2} + (x-1)^3\epsilon(x-1) \\ &= x - 1 - \frac{5}{2}(x-1)^2 + (x-1)^3\epsilon(x-1) \\ &= -\frac{7}{2} + 6x - \frac{5}{2}x^2 + (x-1)^3\epsilon(x-1) \end{aligned}$$

celui d'ordre 3 est

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)^2\frac{f''(1)}{2} + (x-1)^3\frac{f'''(1)}{3!} + (x-1)^4\epsilon(x-1) \\ &= x - 1 - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{26}{6}(x-1)^3 + (x-1)^4\epsilon(x-1) \\ &= -\frac{47}{6} + 19x + \frac{11}{6}x^2 + \frac{13}{3}x^3 + (x-1)^4\epsilon(x-1) \end{aligned}$$

L'approximation affine est $\widehat{f_1(x)} = x - 1$, l'approximation polynomiale d'ordre 2 est $P_2(f,1) = x - 1 - \frac{5}{2}(x-1)^2$ et celle d'ordre 3 est $P_3(f,1) = x - 1 - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{26}{6}(x-1)^3$

3. L' équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc: $y = x-1$. La position de la courbe représentative de f par rapport à la droite y est déterminée par le signe de

$$d(x) = f(x) - y(x) = -\frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{26}{6}(x-1)^3$$

au voisinage de 1, $d(x)$ est négatif si $x \leq 41/26$ et positif si $x \geq 41/26$, alors la courbe est en-dessous la droite sur $]0, 41/26]$ et au-dessus sur $[41/26, +\infty[$

Exercice 1.33

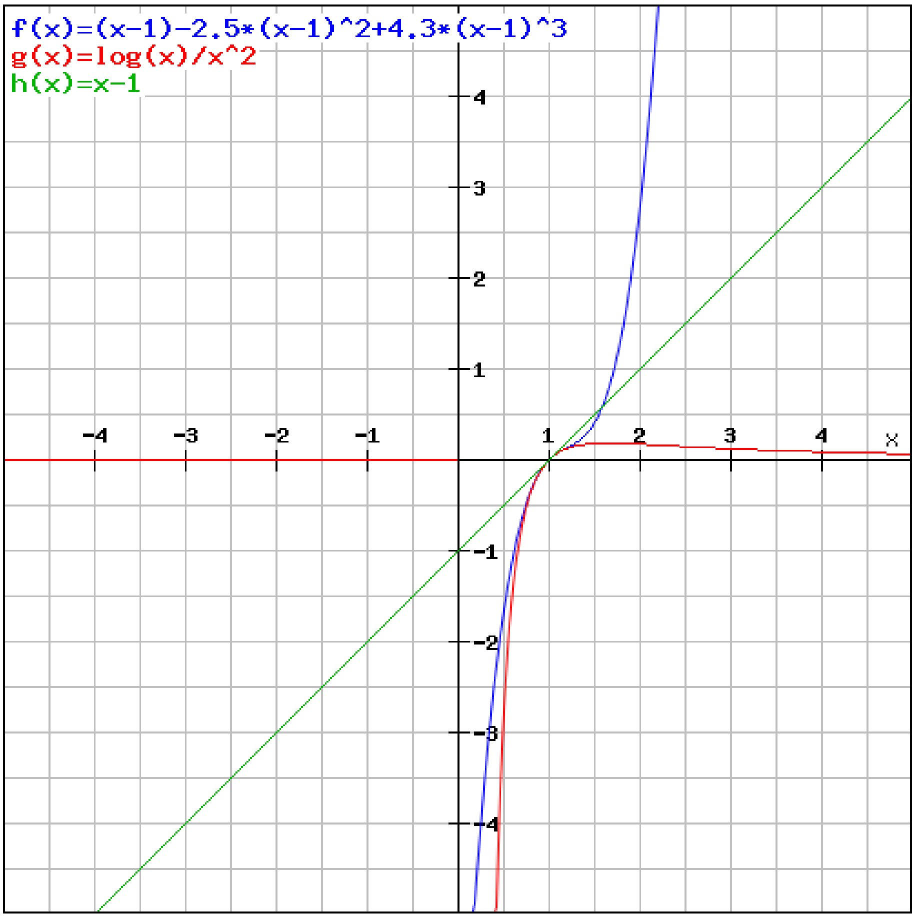

Figure 1: Ex.1.32: $f(x)$, approximation de la fonction $g(x)$ et la tangente de la fonction $f(x)$

1. On écrive le trois premiéres dérivés de $g(x)$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 1 - g^2(x) \\
g''(x) &= -2(g^2(x))' = -2g(x)g'(x) = -2g(x) + 2g^3(x) \\
g'''(x) &= 2(1 - g(x))(-1 + 3g^2(x))
\end{aligned}$$

elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

Soit
$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{x^2}{2}g''(0) + \frac{x^3}{6}g'''(0) + x^4\epsilon(x)$$
le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0, alors pour $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = 0$, $g'''(0) = -2$, on obtient

$$g(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + x^4\epsilon(x)$$

2. On calcule le trois premiéres dérivés de $h(x)$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 2\frac{\ln(1+x)}{1+x} \\
h''(x) &= 2\frac{(1 - \ln(1+x))}{(1+x)^2} \\
h'''(x) &= 2\frac{(-3 + 2\ln(1+x))}{(1+x)^3}
\end{aligned}$$

elles sont continues sur $]-1, \infty[$.

Soit
$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{x^2}{2}h''(0) + \frac{x^3}{6}g'''(0) + x^4\epsilon(x)$$
le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0, alors pour $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = 2$, $h'''(0) = -6$, on obtient

$$h(x) = x^2 - x^3 + x^4\epsilon(x)$$

3. Pour x proche de 0 on utilise les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 de les fonctions $h(x)$ et $g(x)$:

$$f(x) = \frac{h(x) - x^2}{x - g(x)} = \frac{x^2 - x^3 + x^4\epsilon(x) - x^2}{x - x + \frac{1}{3}^3 + x^4\epsilon(x)} = -3$$

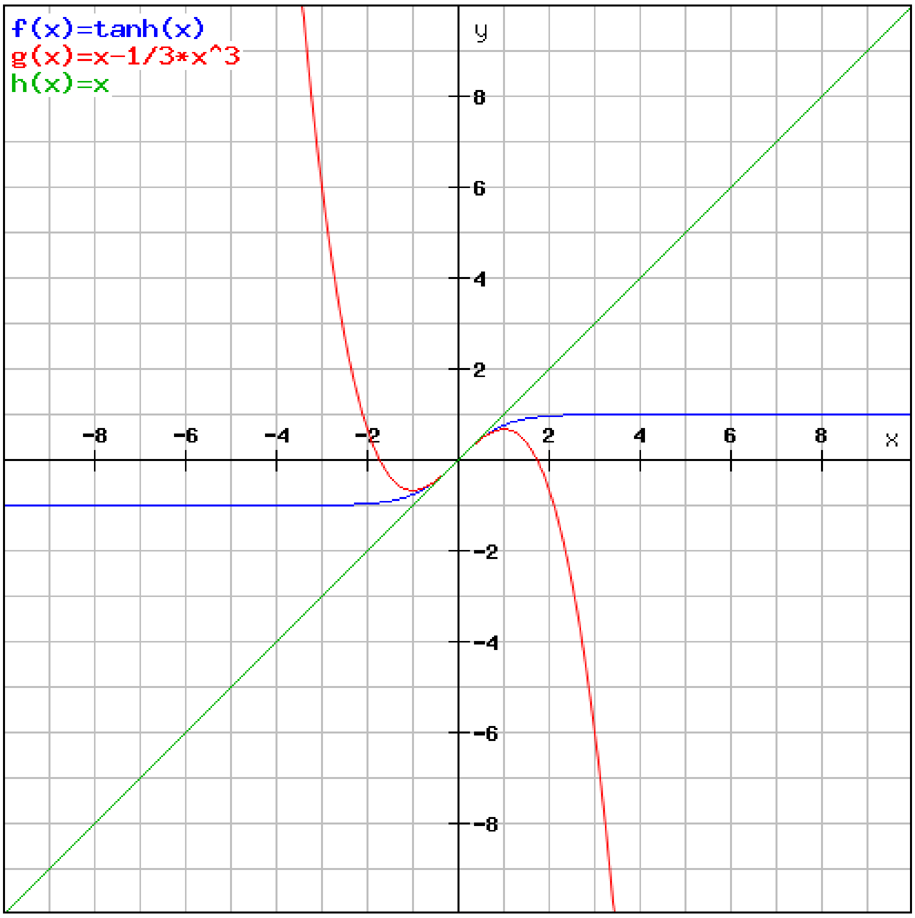

Figure 2: Ex.1.33: $f(x)$, approximation de la fonction $g(x)$ et la tangente de la fonction $f(x)$