

SOLUTIONS TD 20

Extrema libres des fonctions de deux variables

Exercice 1.67

- a) U est fraction rationnelle (c'est-à-dire les quotients de deux polynômes), donc de classe \mathcal{C}^1 sur le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 où son dénominateur ne s'annule pas $D_U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$, et $D_U \subset D$ donc U est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
- b) Si $k \neq 0$, la courbe C_k de niveau k a pour équation: $\frac{2xy}{x+y} = k$, ce qui s'écrit aussi: $y = \frac{kx}{2x-k}$ avec $k \neq 2x$.

Soit $M_0 = (4, 2) \in C_k$, alors $k = \frac{2 \times 4 \times 2}{4+2} = 8/3$. La tangente à la courbe $C_{8/3}$ au point $(4, 2)$ a pour équation:

$$\frac{\partial U(4, 2)}{\partial x}(x - 4) + \frac{\partial U(4, 2)}{\partial y}(y - 2) = 0$$

pour $\frac{\partial U(4, 2)}{\partial x} = 2/9$ et $\frac{\partial U(4, 2)}{\partial y} = 8/9$

$$(x - 4) + 4(y - 2) = 0$$

alors $4y + x - 6 = 0$