Solutions TD2

Exercice 1.24

On appelle approximation affine de f au voisinage de a la fonction $\widehat{f_a}$ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\widehat{f_a}(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$$

.

1. Soient $f(1) = e$ et, pour $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$, $f'(1) = e+1$ alors
$$\widehat{f_1}(x) = e + (x-1)(e+1) = -1 + (e+1)x$$
2. Soient $g(1) = 0$ et, pour
$$g'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = 1 - g(x)^2,$$
$g'(1) = 1$, alors
$$\widehat{g_0}(x) = x - 1$$
3. Soient $h(1) = 1$ et, pour $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $h'(1) = \alpha$, alors
$$\widehat{h_1}(x) = 1 + (x-1)\alpha = (1-\alpha) + \alpha x$$
4. Soient $k(1) = 1$ et, pour
$$k'(x) = (1+\ln(x))e^{x\ln(x)} = (1+\ln(x))k(x),$$
en $x = 1$ on obtient $k'(1) = 1$, alors
$$\widehat{k_1}(x) = 1 + (x-1) = x$$
5. Les valeurs approchÈes selon le théoreme 7.11 sont données par
$$f(x) \simeq \widehat{f_a}(x),$$
donc $f(0.9) \simeq \widehat{f_1}(0.9) = 3.25$, $g(0.2) \simeq \widehat{g_0}(0.2) = 0.8$, pour $\alpha = 1/2$ on a $h(1.1) \simeq \widehat{h_1}(1.1) = 1.05$ enfin $k(0.8) = 0.8$

Exercice 1.25

En generale la dérivée composée est $(f \circ u)'(x) = f'[u(x)]u'(x)$.

1. Soient $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ continue sur $]0, +\infty[$ et $u'(x) = e^x(1+x) - x^{-2}$ continue sur $]0, +\infty[$. On a $g(x) = \sqrt{xe^x + 1/x}$ est définie sur $]0, +\infty[$ et on trouve $g'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^x(1+x)-x^{-2}}{\sqrt{xe^x+x^{-1}}}$
2. Soient $f'(u) = \frac{1}{1+u}$ continue sur $]-1, +\infty[$ et $u'(x) = 2x+1$ continue sur $\mathbb{R}$. On a $g(x) = \ln(x^2+x+2)$ définie sur $\mathbb{R}$ et on trouve $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2}$

3. Soient $f'(u) = \frac{1}{u}$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$ continues sur $]0, +\infty[$. On a $g(x) = \ln(\ln(x))$ définie sur $]1, \infty[$, on trouve $g'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

Exercice 1.26

1. Pour $1h$ supplémentaire de travail. Calcul exact: $\Delta f_{1000}(1) = f(1001) - f(1000) = 0.006664$.

   Calcul approché: $df_{1000}(1) = f'(1000) = \frac{2}{3}(1000)-2/3 = 0.013324$

2. Pour $2h$ supplémentaires de travail. Calcul exact: $\Delta f_{1000}(2) = f(1002) - f(1000) = 0.006664$.

   Calcul approché: $df_{1000}(2) = f'(1000)2 = \frac{2}{3}(1000)-2/3 = 0.013333$

Exercice 1.27

1. $C(q) = q^3 - 5q^2 + 10q$ a dérivée toujours positive $\forall q > 0$, on a $C'(q) = 3q^2 - 10q + 10$ avec $\Delta < 0$. En plus $C(q) = q(q^2 - 5q + 10)$ est produit de deux fonctions toujours positives.

2. $C_m(q) = C'(q) = 3q^2 - 10q + 10$ et $C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = (q^2 - 5q + 10)$.

3. $C(10) = 1000 - 500 + 100 = 600$

4. Calcul exact: $\Delta C_{10}(0.1) = C(10.1) - C(10) = 621.251 - 600 = 21.251$

   Calcul approché: $dC_{10}(0.1) = C_m(10)0.1 = 21$

5. On augmente de 2% la production á partir de $q = 10$, c'est à dire de 0.2, alors Calcul exact de la variation relative: $\frac{\Delta C_{10}(0.2)}{C(10)} = \frac{C(10.2)-C(10)}{C(10)} = \frac{621.251-600}{600} = 0.071$

   Calcul approché: $\frac{C'(10)}{C(10)}0.2 = 0.07$