Solutions TD 19

Fonctions convexes et concaves

Exercice 2.49 Soit
$$f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

(a) Soit $\phi(u) = ue^{-u^2/2}$, soit on peut écrire $\phi(u) = -(e^{-u^2/2})'$ comme dérivée premiere de $-e^{-u^2/2}$ fonction composition d'un polynôme par la fonctione exponentielle, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors aussi sa dérivée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit ϕ est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$: la fonction affine u et la fonction composition de $-u^2/2$ polynôme par l'exponentielle.

$$\phi'(u) = -e^{-\frac{u^2}{2}}\left(u^2-1\right)$$
$$\phi''(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}u\left(u^2-3\right)$$

(b) Les points critiques de ϕ sont t.q.

$$\phi'(\tilde{u}) = -e^{-\frac{\tilde{u}^2}{2}}\left(\tilde{u}^2-1\right) = 0$$

c'est-à dire: $\tilde{u} = \pm 1$. Pour $u = 1$, $\phi''(1) = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0$ on obtient un maximum global, et pour $u = -1$ un $\phi''(-1) = +2e^{-\frac{1}{2}} > 0$ donc un minimum global, car $\lim_{x\to\pm\infty} = 0$. Le plus grad intervalle de convexité est t. q. $\phi'' > 0$, c'est-à-dire $-\sqrt{3} < u < 0$ ou $u > \sqrt{3}$, donc $u > \sqrt{3}$.

(c) Soit $f(x,y) = \phi(x)\phi(y)$, alors

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \phi'(x)\phi(y)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \phi(x)\phi'(y)$$

(d) Les points critiques de f sont t.q.

$$\nabla f(x,y) = (\phi'(x)\phi(y), \phi(x)\phi'(y)) = (0,0)$$

qui implique

$$\begin{cases}\phi'(x)\phi(y) = 0\\ \phi(x)\phi'(y) = 0\end{cases}$$

alors on a $\phi'(x) = 0$ et $\phi'(y) = 0$ en $A = (-1,-1)$, $B = (1,1)$,$C = (-1,1)$ et $D = (1,-1)$ et $\phi(x) = 0$ et $\phi(y) = 0$ en $E = (0,0)$.

(e) La matrice hessienne est

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix}\phi''(x)\phi(y) & \phi'(x)\phi'(y)\\ \phi'(x)\phi'(y) & \phi(x)\phi''(y)\end{pmatrix}$$

(f) Nature des points critiques. En A, B on a $\phi'(x) = \phi'(y) = 0$, alors

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \phi''(x)\phi(y) & 0 \\ 0 & \phi(x)\phi''(y) \end{pmatrix}$$

et le $\det D^2 f(A) = (\phi''(\mp 1)\phi(\mp 1))^2 = 4e^{-2} > 0$, avec $\phi''(\mp 1)\phi(\mp 1) = -2e^{-1} < 0$ alors $f(A)$ et $f(B)$ sont des maxima locaux.

En C et D on a $\det D^2 f(C) = (\phi''(1)\phi(-1))^2 = 4e^{-2} > 0$, avec $\phi''(\mp 1)\phi(\mp 1) = -2e^{-1} < 0$ alors $f(C)$ et $f(D)$ sont des minima locaux.

Le point $E = (0,0)$ a

$$D^2 f(E) = \begin{pmatrix} 0 & \phi'(0)^2 \\ \phi'(0)^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\det D^2 f(E) = -1 < 0$ qui donne un point col

(g) Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$.

(i) $\mathcal{D}$ est un ensemble convexe car demi-plan de $\mathbb{R}^2$.

(ii) La function $h = \ln \circ f$

$$h(x,y) = \ln(xy) - \frac{(x^2 + y^2)}{2}$$

est bien définie sur $\mathcal{D}$, car $D_h = \mathcal{D}$. h est combinaison linèaire à coefficients positifs des fonctions concaves: $\ln(xy)$ concave sur $\mathcal{D}$ et $-\frac{(x^2+y^2)}{2}$ polynôme de degré 2 ($4ac - b^2 = 1 > 0$ $a = c = -1/2 < 0$) concave sur $\mathbb{R}^2$.

(iii) L'extremum de f sur $\mathcal{D}$ est le maximum global

$$\max_{(x,y)} f(x,y) = f(1,1) = e^{-1}$$

.

(iv) f est borné sur $\mathcal{D}$ car $f \geq 0$ et ses limits sont

$$\lim_{x,y \to \infty} f(x,y) = 0$$

et

$$\lim_{x,y \to 0^+} f(x,y) = 0$$

donc $0 \leq f(x,y) \leq e^{-1}$.

Exercice 2.51 Soient p_a et p_b les prix unitaires de

$$p_a = 50 - 5Q_a$$
$$p_b = 100 - 10Q_b$$

et la fonction coût $C(Q_a, Q_b) = 90 + 20(Q_a + q_b)$.

1. Soit $\Pi(q_a, Q_b) = p_a Q_a + p_b Q_b - C(Q_a, Q_b)$ la fonction profit, définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\Pi(q_a, Q_b) = (50 - 5Q_a)Q_a + (100 - 10Q_b)Q_b - (90 + 20(Q_a + q_b))$$

2. On veut maximiser le profit: on cherche les points critiques

$$\nabla \Pi(q_a, Q_b) = (0, 0)$$

implique

$$\begin{cases} (50 - 5Q_a) - 5Q_a - 20 = 30 - 10Q_a = 0 \\ (100 - 10Q_b) - 10Q_b - 20 = 80 - 20Q_b = 0 \end{cases}$$

donc $(Q_a, Q_b) = (3, 4)$, le determinant de la matrice hessienne est

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_a^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_b^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_a Q_b} \right)^2 = (-10)(-20) - 0 = 200 > 0$$

avec $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_a^2} = -10 < 0$ et $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_b^2} = -20 < 0$ donc

$$\max_{(Q_a, Q_b)} \Pi(Q_a, Q_b) = \Pi(3, 4) = 115$$

.

Exercice 2.52

1. La fonction $g(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, car produit des fonctions usuelle de classe $\mathcal{C}^2$, un polynôme de degré 2 et la fonction exponentielle.

2. Les points critiques de f sont t.q.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0)$$

implique

$$\begin{cases} e^{-x}(-x^2 - y^2 + 2x) = 0 \\ e^{-x}(2y) = 0 \end{cases}$$

donc $A = (0, 0)$ et $B = (2, 0)$ Déterminons la hessienne de g, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-x}(2 - 4x + x^2 + y^2) & -e^{-x}(2y) \\ -e^{-x}(2y) & e^{-x}2 \end{pmatrix}$$

son determinant est $\det(D^2 f(0, 0)) = 4 > 0$ avec $r = t = 2$ donc A donne un min globale et $\det(D^2 f(2, 0)) = -4e^{-4} < 0$ un point col.