Solutions TD 18

Extrema libres des fonctions de deux variables

Exercice 1.65

a) La $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3$ est un polynôme donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On regarde le signe du determinant du polynôme $rt - s^2 = 4ac - b^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ et $a = 1 > 0$ ou $c = 1 > 0$, alors f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

On optimise f sous la contrainte $x + y = 0$. La contrainte s'écrit sous la forme équivalente: $y = -x$. Ainsi nous posons de façon naturelle

$$F(x) = f(x, -x) = x^2 - x^2 + x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 3.$$

Optimiser f sous la contrainte $x + y = 0$ revient alors á optimiser F sur $\mathbb{R}$, nous sommes ramenés à un problème à une variable.

Or $F'(x) = 2x + 2$, la fonction F admet comme point critique $x = -1$, on a $F''(x) = 2 > 0$. Par suite F admet sur $\mathbb{R}$ un minimum local en -1. on en déduit que la fonction f admet sous la contrainte $x + y$, un minimum local en $(-1, 1)$ de valeur $f(-1, 1) = 1$.

b) La fonction $g(x,y) = (x^2 + y^2) + e^{x^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.Déterminons la hessienne de g, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$D^2g(x,y) = \begin{pmatrix} (4x^2+2)\, e^{x^2+y^2} + 2 & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & (4y^2+2)\, e^{x^2+y^2} + 2 \end{pmatrix}$$

son determinant est $\det\left(D^2g(x,y)\right) = 4\left(e^{x^2+y^2} + 1\right)\left(e^{x^2+y^2}\left(2x^2 + 2y^2 + 1\right) + 1\right) > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $s = (4x^2+2)\, e^{x^2+y^2} + 2 > 0$ et $t = (4y^2+2)\, e^{x^2+y^2} + 2 > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc g est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Optimisons g sous la contrainte $x + y = 0$. La contrainte s'écrit sous la forme équivalente: $y = -x$. Ainsi nous posons de façon naturelle

$$G(x) = g(x, -x) = 2x^2 + e^{2x^2}.$$

Optimiser g sous la contrainte $x + y = 0$ revient alors à optimiser G sur $\mathbb{R}$. nous sommes ramenés à un problème à une variable.

Or $G'(x) = 2x + e^{2x^2}(4x)$, la fonction F admet comme point critique $x = 0$, on a $G''(x) = 2 + 4e^{2x^2}(4x^2 + 1) > 0$. Par suite G admet sur $\mathbb{R}$ un minimum local en 0. on en déduit que la fonction g admet sous la contrainte $x + y$, un minimum local en $(0, 0)$ de valeur $g(0, 0) = 1$.

Exercice 1.66

1. On considère les fonctions

$$f(x) = 8x - 2x^2 + b^2$$

et

$$g(y) = 8y - a^2 - 2y^2$$

où sont des constantes rélles.

a) Les deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Leur dérivées sont données par

$$f'(x) = 8 - 4x$$
$$g'(y) = 8 - 4y$$

qui sont toutes deux nulles en 2, strictement positives sur $]-\infty, 2[$ et strictement négative sur $]2, +\infty[$. Les fonctions admettent donc un unique maximum local en 2, qui est leur maximum global, de valeurs respectives $8 + b^2$ et $8 - a^2$. On constate par ailleurs que f et g tendent vers $-\infty$ pour $x, y \to \pm\infty$, ne sont donc pas minordés globalement.

b) On calcule le gradient de $h(x, y) = 8(x + y) - 3x^2 - y^2$, qui est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\nabla h(x, y) = (8 - 6x, 8 - 2y).$$

L'unique point critique de h est donc $(4/3, 4)$. La hessienne de h étant:

$$D^2 h(x, y) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

on obtient directement, puisque les deux valeurs propres sont strictement négatives, que h atteint un maximum local strict en $(4/3, 4)$, avec valeur $h(4/3, 4) = 64/3$

2. Application:

(a) Chaque directeur optimise sa fonction profit $\Pi_1(q_1, q_2) = pq_1 - C_1(q_1, q_2)$ (resp. $\Pi_2(q_1, q_2) = pq_2 - C_2(q_1, q_2)$) par rapport à la seule variable qu'il contrôle, q_1 (reps. q_2). Pour $p = 10$, on obtient précisément les deux fonctions de la question 1, de sorte que chaque directeur fixe sa production à 2. Les profits qui en découlent sont égaux à:

$$\Pi_1(2, 2) = 8 + 2^2 = 12, \quad \Pi_2(2, 2) = 8 - 2^2 = 4$$

(b) À présent, la direction commune cherche à optimiser le profit total $\Pi_1(q_1, q_2) + \Pi_2(q_1, q_2)$ en jouant sur les deux variables simultanément. On note que pour $p = 10$, cette fonction est égale à la fonction h de la deuxième question, et son maximum est donc égal à $64/3$. Comme ce profit total est plus grand que la somme des profits optimisés indépendamment, la fusion semble souhaitable.