Solutions TD 17

Extrema libres des fonctions de deux variables

Exercice 1.64

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que les extrema locaux trouvés ne sont pas des extrema globaux.

a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f n'est pas majorée globalement (on le voit en fixant x et en faisant tendre y vers l'infini).

   Déterminons les points critique de f afin de déterminer ses extremis locaux. Pour tout $\mathbb{R}^2$,
$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 6xy - 12)$$
   donc
$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ 6xy - 12 & = 0 \end{cases}$$
   implique
$$\begin{cases} 3(2/y)^2 + 3y^2 - 15 & = 0 \\ & x = 2/y \end{cases}$$
   la première equation est résolue pour
$$(y^2)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \{4; 1\}$$
   c'est-à dir pour
$$y_{1,2,3,4} = \{-2; -1; 1; 2\}$$
   Il y a quatre points critiques: $A = (-1,-2)$, $B = (-2,-1)$, $C = (2,1)$ et $D = (1,2)$. Déterminons la hessienne de f, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$
   son determinant est $\det(D^2 f(x,y)) = 6(x^2 - y^2)$, qui calculé dans les points critiques est $\det(D^2 f(A)) = 6(1-4) = -18 = \det(D^2 f(D))$ donc A, D donnent points cols et $\det(D^2 f(B)) = 6(4-1) = 18 = \det(D^2 f(C))$ et B donne un point de maximum local ($r = t = -2$) et D donne un point de minimum local ($r = t = 2$).

b) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3ax$ où $a \in \mathbb{R}^2$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$: la fonction g n'est pas majorée globalement (on le voit en fixant x et en faisant tendre y vers l'infini).

   Déterminons les points critique de g afin de déterminer ses extremis locaux. Pour tout $\mathbb{R}^2$,
$$\nabla g(x,y) = (3x^2 - 3ay, 3y^2 - 3ay)$$

donc

$$\begin{cases} 3x^2 - 3ay &= 0 \\ 3y^2 - 3ax &= 0 \end{cases}$$

On obtient les deux points critiques $A = (0,0)$ et $B = (a,a)$. Déterminons la hessienne de g, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$D^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{pmatrix}$$

son determinant est $\det(D^2 g(x,y)) = 9(4xy - a^2)$, qui calculé en A est negatif $\det(D^2 g(A)) = -a^2 < 0$, alors A est un point col et en B est $\det(D^2 g(x,y)) = 9(4a^2 - a^2) = 27a^2 > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^2$ mais si $x = y = a > 0$ on a $g(B)$ minimum local et si $x = y = a < 0$ on a $f(B)$ maximum local.

c) $h(x,y) = x^4 + y^3 - 4y - 2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et elle n'est pas majorée globalement. Déterminons les points critique de h afin de déterminer ses extremis locaux. Pour tout $\mathbb{R}^2$,

$$\nabla h(x,y) = (4x^3, 3y^2 - 4)$$

donc

$$\begin{cases} 4x^3 &= 0 \\ 3y^2 - 4 &= 0 \end{cases}$$

qui implique

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

donnant deux points critiques $A = (0, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ et $B = (0, \frac{2}{\sqrt{3}})$. Déterminons la hessienne de h, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$D^2 h(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

son determinant est $\det(D^2 h(x,y)) = 72x^2 y$, qui calculé en A et B est null donc on peut rien dire avec le théoreme. Il faut écrire le DL d'ordre 2 aux points critiques:

1. $h(l, \pm\frac{2}{\sqrt{3}} + k) - h(0, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}) = \pm 2\sqrt{3}k^2 + reste.$
2. On suppose $|l|, |k|$ suffisamment petites.
   (a) pour $k \neq 0$, le signe de $h(l, \pm\frac{2}{\sqrt{3}} + k) - h(0, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}) \simeq \pm 2\sqrt{3}k^2$ est negative pour le point A et positive pour le point B.
   (b) pour $k = 0$ il faut étudier directement le signe de $h(l, \pm\frac{2}{\sqrt{3}} + k) - h(0, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}) = l^4 \geq 0$, dans ce cas la différence est toujours positive.
3. Sur tout voisinage de A la différence $h(l, \pm\frac{2}{\sqrt{3}} + k) - h(0, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ change de signe et par suite h admet un point col en A. Par contre sur tout voisinage de B la différence $h(l, \pm\frac{2}{\sqrt{3}} + k) - h(0, \frac{2}{\sqrt{3}})$ est toujours positive et par suite h admet un minimum en $h(B)$

d) $k(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et elle n'est pas majorée globalement. Déterminons les points critique de k afin de déterminer ses extremis locaux. Pour tout $\mathbb{R}^2$,

$$\nabla k(x,y) = (3x^2 + y^2 - 2xy, 2xy - x^2 - 3y^2)$$

donc

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy & = 0 \\ 2xy - x^2 - 3y^2 & = 0 \end{cases}$$

donnant comme point critique $A = (0,0)$. Déterminons la hessienne de k, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$D^2k(x,y) = \begin{pmatrix} 2(3x-y) & 2(y-x) \\ 2(y-x) & -2(3y-x) \end{pmatrix}$$

son determinant est $\det\left(D^2k(x,y)\right) = 4(x-3y)(3x-y) - 4(y-x)^2$, qui calculé en A est négatif donc $k(A)$ est un point col.