Solutions TD 15

Fonctions convexes et concaves

Exercice 1.58
Soient f et g

$$f(x,y) = x^4 + y^4,$$
$$g(x,y) = (x-y)^2$$

1. f et g sont polynômes donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut utiliser le critére de convexité pour f:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 12x^2$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 12y^2$$

   On obtient $rs - t^2 = 12^2x^2y^2 \geq 0$ et $r = 12x^2 \geq 0, t = 12y^2 \geq 0$, donc f est convexe. On aurait pu dire que f est somme à coefficients positifs de deux fonctions convexes.

   g est un polynôme de deuxième degrèe, on peut donc regarder le signe du determinant $4ac - b^2 = 4 + 2 = 6 > 0$ et $a = c = 1 > 0$, donc f est convexe.

2. La fonction $h = f - g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on regarde le signe de la forme quadratique pour vérifier la convexité ou la concavité de h:

$$\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2} = 12x^2 - 2$$
$$\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial xy} = 2$$
$$\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$$

   On obtient $rt - s^2 = 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 4$ avec $r = 2(6x^2 - 1)$, $t = 2(6y^2 - 1)$. Pour $x = 0$ ou $y = 0$ la forme quadratique est défini negative, donc elle est ni convexe ni concave.

Exercice 1.59
Soit $f(x,y) = \ln(1 + 2x + 3y)$

1. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + 2x + 3y > 0\}$

2. f est composition d'une fonction affine $h(x,y) = 1 + 2x + 3y$ sur $\mathbb{R}^2$ par une fonction $g(u) = \ln(u)$ concave sur $]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$. Alors $f = g \circ h$ est concave sur D_f.

3. Étant donné que la forme quadratique est nulle $rt - s^2 = \frac{(36-36)}{(2x+3y+1)^4} = 0$, on peut rien dire, le reste du développement limité n'est plus négligeable devant la forme quadratique.

Exercice 1.60 Soit $f(x,y) = \frac{1-xy}{x+y}$

1. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$ il est pas convexe.

2. f est fraction rationnelle donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{C}_{1,2}$, on regarde le signe de la forme quadratique $d^2f(x,y)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{2\left(y^2+1\right)}{(x+y)^3} = r \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} &= \frac{2-2xy}{(x+y)^3} = s \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{2\left(x^2+1\right)}{(x+y)^3} = t
\end{aligned}$$

on obtient

$$rt - s^2 = \frac{4\left((x^2+1)(y^2+1) - (1-xy)\right)}{(x+y)^6} = \frac{4}{(x+y)^4} > 0$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, mais $r, t > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}_1$, donc f est convexe sur $\mathcal{C}_1$, et $r, t < 0$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}_2$, donc f est concave sur $\mathcal{C}_2$.

3. Soit $g(x,y) = f(x,y) - \ln(x+y)$. Le domain de définition de g est $\mathcal{C}_1$. La fonction g est combinaison linéaire à coefficients positifs de deux fonctions convexes: f montré avant et $-ln(x+y)$, convexe car composition d'une fonction affine $x+y$ sur $\mathbb{R}^2$ par une fonction convexe $-\ln$ sur $]0,+\infty[\subset \mathbb{R}$, alors $-\ln(x+y)$ est convexe sur $\mathcal{C}_1$.

Exercice 1.61 Soit f

$$f(x,y) = \frac{\exp\left(5x^2 - xy + y^2\right)}{x^2 y}$$

1. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y \neq 0\}$, il n'est pas convexe.

2. En passant au logarithme

$$\ln f = 5x^2 - xy + y^2 - \ln(x^2 y)$$

combinaison linéaire à coefficients positifs de deux fonctions convexes: $5x^2 - xy + y^2$ polynôme de deuxiéme degré convexe sur $\mathbb{R}^2$, car $4ac - b^2 = 20 - 1 = 19 > 0$ avec $a = 5 > 0, c = 1 > 0$. Et $-\ln(x^2 y) = -2\ln(x) - \ln(y)$ somme de deux fonctions de deux variables convexe sur $]0,+\infty[$, donc $-\ln(x^2 y)$ est convexe sur $(]0,+\infty[)^2 = \mathcal{C}$.

Si $\ln f$ est convexe sur $\mathcal{C}$ alor $e^{\ln(f)} = f$ est convexe sur $\mathcal{C}$.

3. Soit $g(x, y) = f(x, y) + ((x + y)^2 + 1)^3$, g est combinaison linéaire à coefficients positifs de deux fonctions convexes, car $((x + y)^2 + 1)^3$ est un polynôme donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut utiliser le critére de convexité pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6\left((x+y)^2+1\right)\left(5(x+y)^2+1\right) = r$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} = 6\left((x+y)^2+1\right)\left(5(x+y)^2+1\right) = s$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6\left((x+y)^2+1\right)\left(5(x+y)^2+1\right) = t$$

on obtient $r = t = s > 0$ et $rt - s^2 = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$, donc elle est convexe sur $\mathcal{C}$.