

SOLUTIONS TD 14

Dérivées partielles du deuxième ordre

Exercice 1.56

a) $f(x, y) = y \ln(x)$

(i) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

(ii) Posons $\phi(x, y) = x^y$ (cfr. exemple 16.13), on sait qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f , et posons $h(u) = \ln(u)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, en outre $\phi(D_f) \subset]0, +\infty[$ donc $f = h \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f .

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

b) $f(x, y) = x^y = e^{y \ln(x)}$

(i) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

(ii) Cfr. exemple 16.13, on peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^2$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = (y-1)yx^{y-2}$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = x^y \ln^2(x)$$

c) $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$

(i) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

(ii) f est produit de deux fonctions usuelles d'une variable: on en déduit par application du lemme d'extension que, $g_1(x, y) = x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ donc sur D_f et $h_2(x, y) = y^\beta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ donc sur D_f , alors $f = g_1 h_2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f .

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2} y^\beta$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = (\beta-1)\beta x^\alpha y^{\beta-2}$$

d) $f(x, y) = \frac{x^2+y}{xy}$

(i) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$

- (ii) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f , car fraction rationnelle où son dénominateur ne s'annule pas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2 + y)}{x^3 y} - \frac{2}{xy} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2 + y)}{xy^3} - \frac{2}{xy^2}\end{aligned}$$

Développement limité d'ordre 2

Exercice 1.57

- a) $f(x, y) = x^2 y + 3xy + y^2$ a comme domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^2$, est un polynôme donc il est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On calcule les quantités:

$$\begin{aligned}f(1, 2) &= 12 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 3y + 2xy & \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} &= 10 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= x^2 + 3x + 2y & \frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} &= 8 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= 2y & \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial x^2} &= 4 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial xy} &= 2x + 3 & \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial xy} &= 5 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= 2 & \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial y^2} &= 2\end{aligned}$$

Le DL d'ordre 2 au voisinage de $M_0 = (1, 2)$ est

$$f(1 + h, 2 + k) = 12 + 10h + 8k + \frac{1}{2}(4h^2 + 10hk + 2k^2) + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k) \quad (1)$$

L'équation du plan tangent au voisinage de M_0 est donné par $z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} =$

$$\begin{aligned}z - 12 &= (x - 1)10 + (y - 2)8, \\ z &= 10x + 8y - 14\end{aligned}$$

La surface représentative de f traverse le plan tangent car $rt - s^2 = 4y - (2x + 3)^2$ qui calculé en $M_0 = (1, 2)$ est $rt - s^2 = 8 - 36 = -28 < 0$ négatif.

- b) $f(x, y) = \ln(1 + 2x + 3y)$ a comme domaine de définition $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + 2x + 3y > 0\}$, f est composition des fonctions usuelles $f = g \circ h$, où $g(u) = \ln(u)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et $h(x, y) = 1 + 2x + 3y$ une fonction affine de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donc sur D_f , en plus $h(D_f) \subset]0, +\infty[$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f . On

calcule les quantités:

$$\begin{array}{ll}
f(0,0) = 0 & \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{2x+3y+1} & \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 2 \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y+1} & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 3 \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{4}{(2x+3y+1)^2} & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = -4 \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} = -\frac{6}{(2x+3y+1)^2} & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial xy} = -6 \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{9}{(2x+3y+1)^2} & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = -9
\end{array}$$

Le DL d'ordre 2 au voisinage de $M_0 = (0,0)$ est

$$f(h,k) = 2h + 3k + \frac{1}{2}(-4h^2 - 6hk - 9k^2) + (h^2 + k^2)\epsilon(h,k) \quad (2)$$

L'équation du plan tangent au voisinage de M_0 est donné par $z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$

$$z = 2x + 3y,$$

Étant donné $rt - s^2 = 0$, on peut rien dire.

- c) $f(x, y) = x^2 e^y - y e^x$ a comme domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^2$, f est somme de deux produits des fonctions usuelles d'une variable de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème sur les opérations algébriques et le lemme d'extension f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On calcule les quantités:

$$\begin{array}{ll}
f(0,0) = 0 & \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xe^y - e^x y & \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 e^y - e^x & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = -1 \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2e^y - e^x y & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2 \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} = -2xe^y - e^x & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial xy} = -1 \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = e^y x^2 & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0
\end{array}$$

Le DL d'ordre 2 au voisinage de $M_0 = (0,0)$ est

$$f(h,k) = -k + \frac{1}{2}(2h^2 - 3hk) + (h^2 + k^2)\epsilon(h,k) \quad (3)$$

L'équation du plan tangent au voisinage de M_0 est donné par $z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$

$$z = -y,$$

Étant donné que $rt - s^2 = -1 < 0$, alors au voisinage de M_0 , la surface représentative de f traverse le plan tangente.