

SOLUTIONS TD 11

Dérivées partielles du premier ordre

Exercice 1.50

a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

1.

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\} \quad (1)$$

2. f est $\mathcal{C}^1$ car les fractions rationnelles (c'est-à-dire les quotients de deux polynômes) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ où leur dénominateur ne s'annule pas.

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{1}{x+y} - \frac{x-y}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= -\frac{x-y}{(x+y)^2} - \frac{1}{x+y} \end{aligned} \quad (2)$$

b) $f(x, y) = Ax^\alpha y^\beta = Ae^{\alpha \ln(x)} e^{\beta \ln(y)}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0)$

1.

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \quad (3)$$

2. f est $\mathcal{C}^1$ car produit de fonctions d'une variable ($g(x) = x^\alpha$ et $h(y) = y^\beta$) de classe $\mathcal{C}^1$ (Lemme d'extension).

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= A\alpha x^{\alpha-1} y^\beta \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= A\beta x^\alpha y^{\beta-1} \end{aligned} \quad (4)$$

c) $f(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$

1.

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0, xy > 0\} \quad (5)$$

2. f est $\mathcal{C}^1$ car composée $f = g \circ \phi$ de $g(u) = \ln(u)$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de $\phi(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{2*}$, donc sur D_f , telles que l'image $\phi(\mathbb{R}_+^{2*}) \subset \mathbb{R}_+^*$, on peut donc appliquer le corollaire 16.11, et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D_f = \mathbb{R}_+^{2*}$.

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{x^2+y^2}{xy} \left(-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \frac{x^2+y^2}{xy} \left(-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

d) $f(x, y) = (y + 2)^{x+1} = e^{(x+1)\ln(y+2)}$

1.

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2 > 0\} \quad (7)$$

2. Posons $g(y) = \ln(y + 2)$, $h(x) = x + 1$, $g_2(x, y) = \ln(y + 2)$, $h_1(x, y) = (x + 1)$, $\phi(x, y) = (x + 1)\ln(y + 2)$ et $F(u) = e^u$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -2, +\infty[$ et la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; ce sont des fonctions usuelles d'une variable. On en déduit, par application du lemme d'extension, que:

- la fonction g_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times] -2, +\infty[= D_f$
- la fonction h_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc sur D_f

De plus $\phi = h_1 g_2$ donc ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f comme produit de deux fonctions de est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f . Enfin on constate que $f = F \circ \phi$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f . En outre $\phi(D_f) \subset \mathbb{R}$, on peut donc appliquer le corollaire 16.11, et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f .

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= (y + 2)^{x+1} \log(y + 2) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= (1 + x)(2 + y)^x \end{aligned} \quad (8)$$