Solutions $TD1$

Exercice 1.22

1. On rappelle la notion de *fonction continûment dérivable*: soit h une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que h est de classe C^1 si h est dérivable sur I, et h' est continue sur I.

   Les fonctions *polynômes, sinus, cosinus, exponentielle*, sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La fonction *logarithme népérien* est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. La fonction *racine carré* est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, ainsi que les fonctions $x^r, r > 0$.

   Puisque f est un polynôme de degré 3, alors f est de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ et $f^{(4)} = 0$.

2. Soit f' la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f' : x \mapsto 3x^2 - 6x + 6$, et soit df_a le différentielle de f au point a définie sur $\mathbb{R}$ par $df_a(h) : h \mapsto df_a(h) = f'(a)h$

3. Pour $h \in \mathbb{R}$ on a
$$df_a(h) = (3a^2 - 6a + 6)h$$
   et
$$\begin{aligned}\Delta f_a(h) &= f(a+h) - f(a) = (a+h)^3 - 3(a+h)^2 + 6(a+h) - a^3 + 3a^2 - 6a \\ &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3a^2 - 6ah - 3h^2 + 6a + 6h - a^3 + 3a^2 - 6a \\ &= (3a^2 - 6a + 6)h + 3(a-1)h^2 + h^3\end{aligned}$$

   Pour $a = 1$,
$$df_1(h) = (3 - 6 + 6)h = 3h$$
   et
$$\Delta f_1(h) = (3 - 6 + 6)h + 3(1-1)h^2 + h^3 = 3h + h^3$$
   Pour $a = -1$
$$df_{-1}(h) = (3 + 6 + 6)h = 15h$$
   et
$$\Delta f_{-1}(h) = (3 + 6 + 6)h + 3(-1-1)h^2 + h^3 = 15h - 6h^2 + h^3.$$

4. L'erreur absolue commise en remplaçant $\Delta f_a(h)$ par $df_a(h)$ est la différence
$$|\Delta f_a(h) - df_a(h)| = 3(a-1)h^2 + h^3$$

Exercice 1.23

1. La fonction $f(x) = x^x$ appellée "tour de puissance d'ordre 2" est continue sur $]0,+\infty[$, parce que composée des fonctions continues, avec dérivées continues sur $]0,+\infty[$, donc f aussi est continue avec dérivée sur $]0,+\infty[$. La fonction $g(x) = x - 1 + \ln(x)$, est somme des fonctions continues avec dérivées continues sur $]0,+\infty[$, donc elle est continue et sa dérivée est continue sur $]0,+\infty[$.

2. Les dérivées sont:
$$f'(x) = (e^{x\ln(x)})' = (1+\ln(x))x^x$$
et
$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

3. Les développement limités d'ordre 1 au voisinage de 1 sont:
$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)\epsilon(x-1) \\ &= 1 + (x-1) + (x-1)\epsilon(x-1) \\ &= x + (x-1)\epsilon(x-1) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} g(x) &= g(1) + (x-1)g'(1) + (x-1)\epsilon(x-1) \\ &= 0 + (x-1)2 + (x-1)\epsilon(x-1) \\ &= 2(x-1) + (x-1)\epsilon(x-1) \end{aligned}$$

4. On utilise les développement limités et on écrit
$$\phi(x) = \frac{x-1+(x-1)\epsilon(x-1)}{2(x-1)+(x-1)\epsilon(x-1)}$$
la fonction ϵ est continue en 0 et
$$\lim_{x\to 1} \epsilon(x-1) = 0,$$
donc pour $x \to 1$, $\phi(x) \to \frac{1}{2}$.