Solutions TD 10

Parties convexes de $\mathbb{R}^2$

Exercice 1.45, deuxième partie

Les graphiques ne visualisent pas la frontiére il faut faire référence aux descriptions au dessous de chaque figure.

- On regarde le graphe dans la figure (1) le sous-ensemble $\mathcal{E}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0, -1 < x < 1, -1 \leq y \leq 2\}$. Il est convexes car intersection d'un nombre fini des demi-plans, qui sont des ensembles convexes.

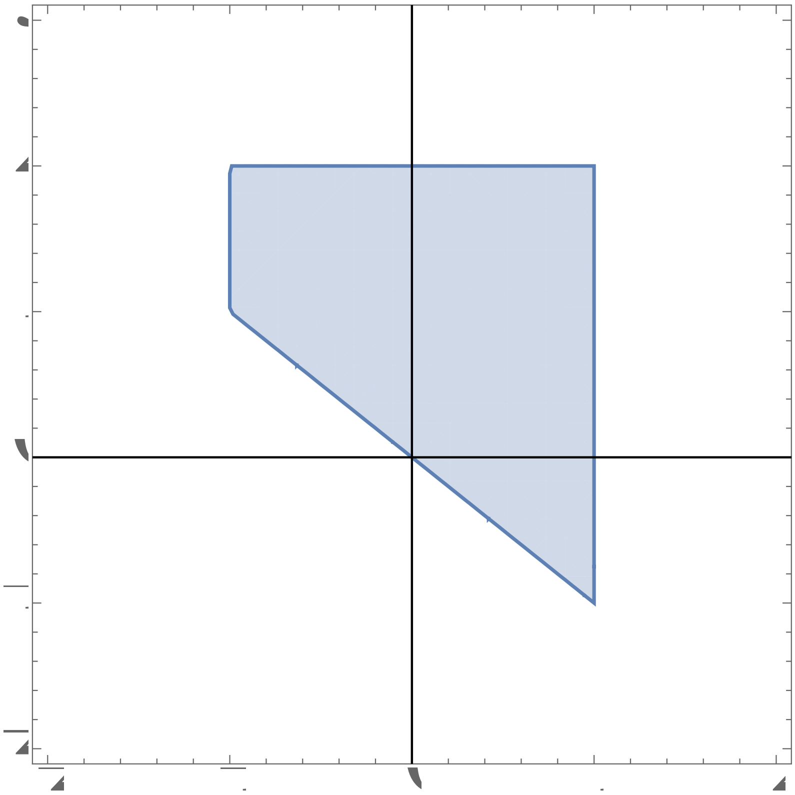

Figure 1: Ex.1.45, (iii), l'ensemble $\mathcal{E}_3$ comprends seulement le point $(1, -1)$ et le segment $[(-1, 2), (1, 2)]$ dans sa frontière, donc il est ni ouvert ni fermé, mais il est borné par le rectangle $|x| \leq 1, |y| \leq 2$.

- On regarde le graph dans la figure (2) le sous-ensemble $\mathcal{E}_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + y + 1 > 0, -1 < x < 1, -1 \leq y \leq 2\}$. Il est convexes car intersection d'un nombre fini des demi-plans, qui sont des ensembles convexes.

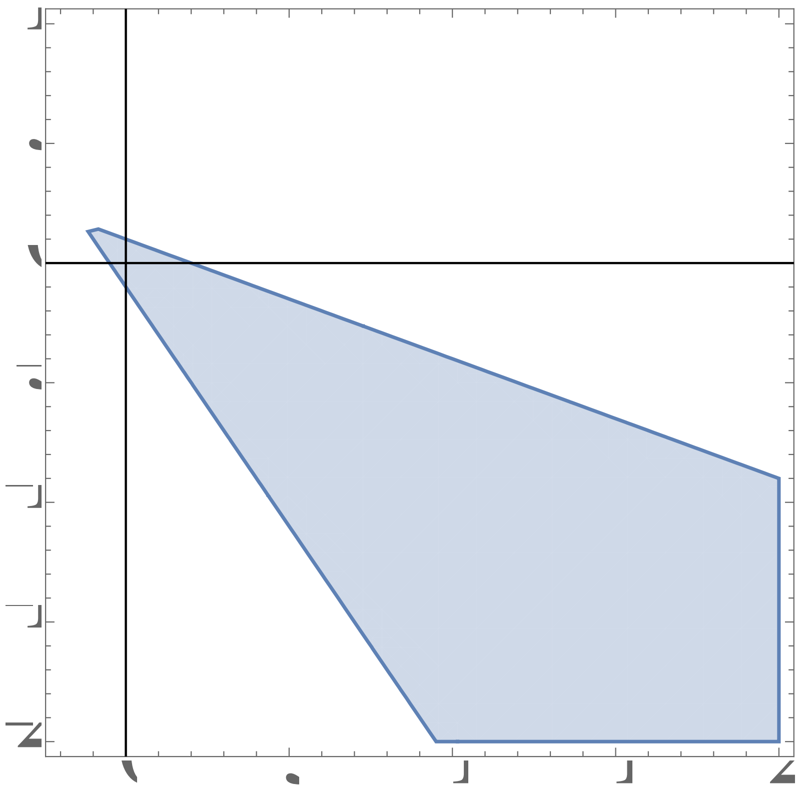

Figure 2: Ex.1.45, (iv), l'ensemble $\mathcal{E}_4$ comprends la droite $x + 2y - 2 \leq 0$ mais pas la droite $2x + y + 1 > 0$, donc il est ni ouvert ni fermé et non borné.

Fonctions de deux variables

Exercice 1.46

Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes. Indiquer (sans justification) s'il est ouvert, fermé, borné.

(i) $f(x, y) = \frac{2x+3y}{2x-y}$. l'ensemble de définition de $f(x, y)$ est $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x \neq y\}$. Il est ouvert et pas borné.

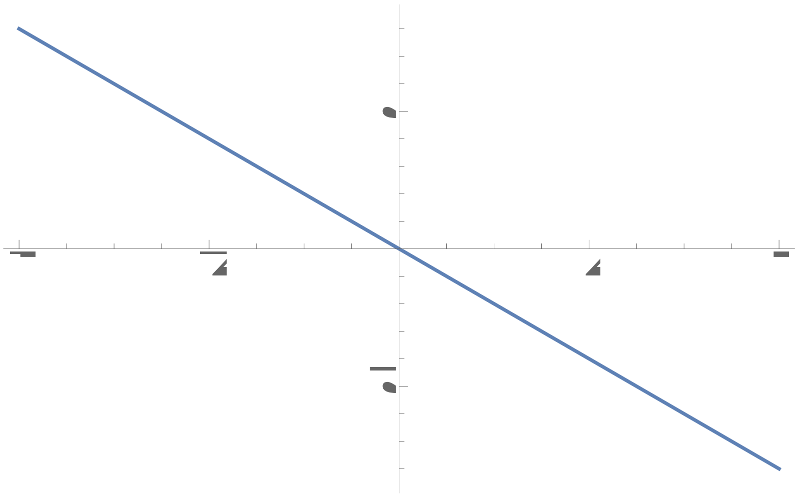

Figure 3: Ex.1.46, (i), L'ensemble de définition de $f(x,y) = \frac{2x+3y}{2x-y}$, D_f est tout le plan sauf la droite $y = 2x$.

(ii) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x-y}}$. L'ensemble de définition de $f(x,y)$ est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - y > 0\}$. Il est ouvert et pas borné.

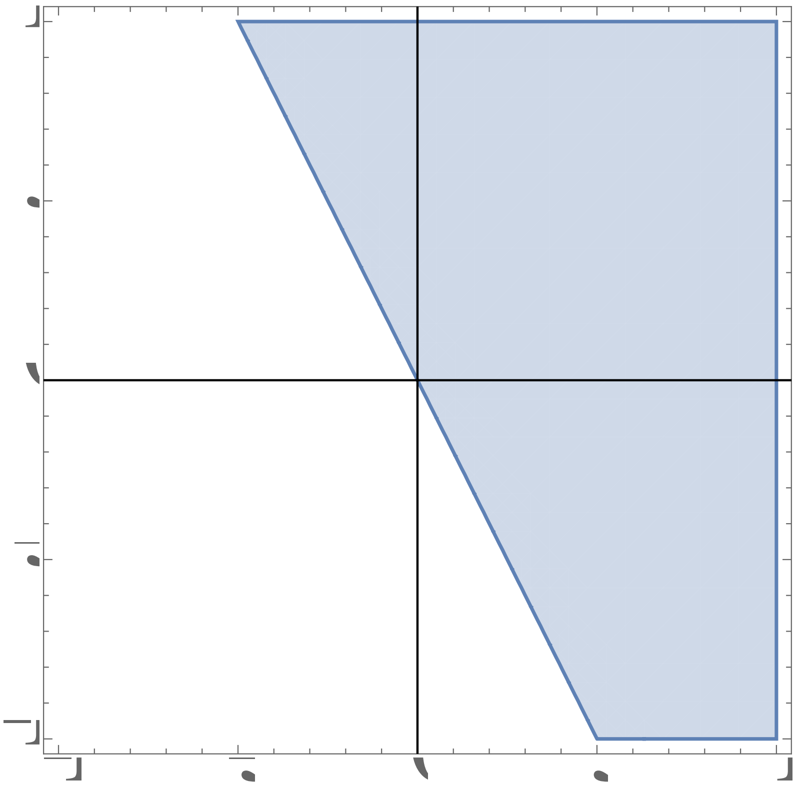

Figure 4: Ex.1.46, (ii), l'ensemble de définition de $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x-y}}$, D_f est le demi-plan supérieur à la droite $y = 2x$.

(iii) $f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$. L'ensemble de définition de $f(x,y)$ est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 > 0\}$. Il est ouvert et pas borné.

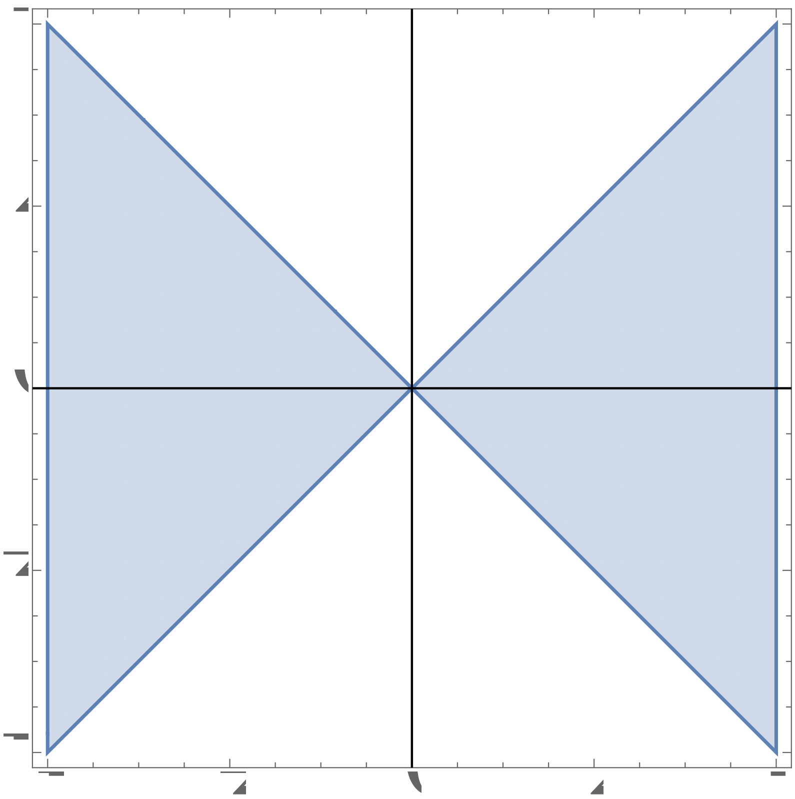

Figure 5: Ex.1.46, (iii), l'ensemble de définition de $f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$, D_f est l'intersection des deux demi-plans $x+y>0$ et $x-y>0$.

(iv) $f(x,y) = x^y$. L'ensemble de définition de $f(x,y)$ est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$. Il est ouvert et pas borné.

(v) $f(x,y) = \sqrt{(x-y)(x+y+1)}$. L'ensemble de définition de $f(x,y)$ est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-y)(x+y+1) \geq 0\}$. Il est ouvert et pas borné.

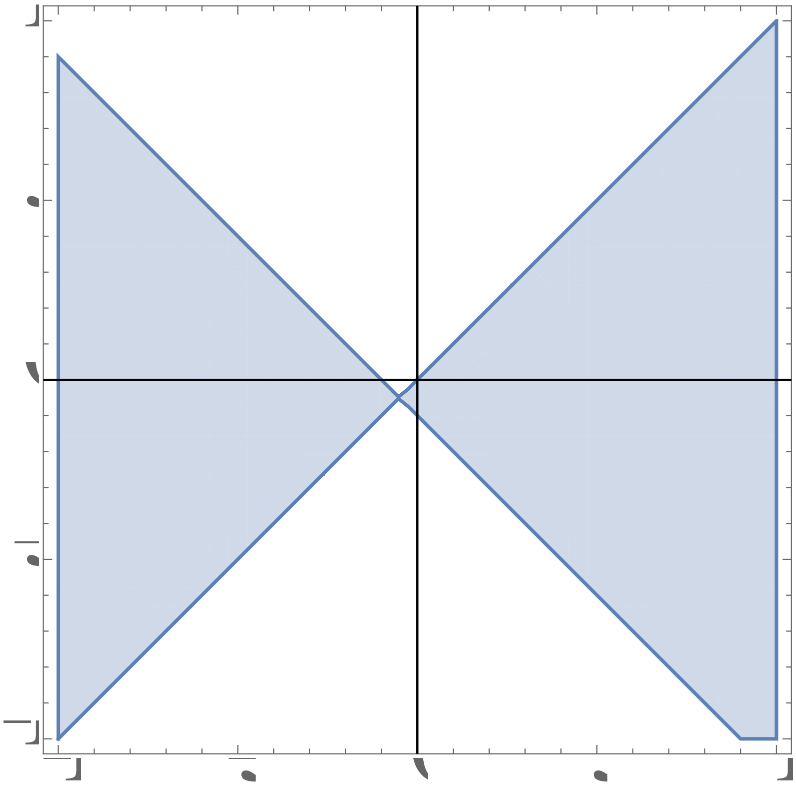

Figure 6: Ex.1.46, (v).

(vi) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$. L'ensemble de définition de $f(x, y)$ est $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, (x^2 + y^2) < 1\}$. Il est ouvert et borné.

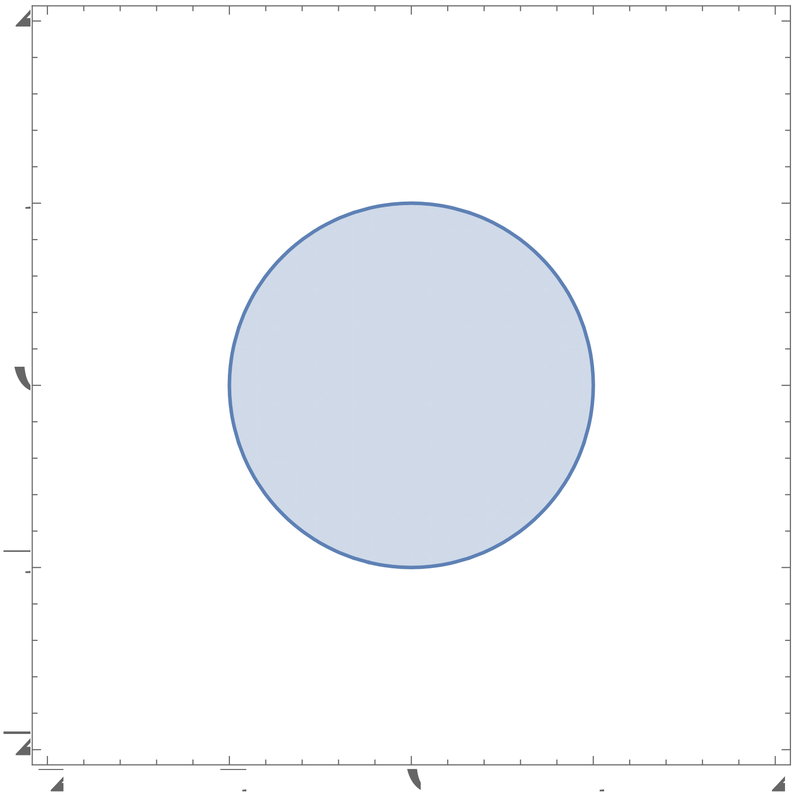

Figure 7: Ex.1.46, (vi).

(vii) $f(x,y) = \sqrt{\frac{(1-x^2-y^2)}{(x^2-y^2)}}$. L'ensemble de définition de $f(x,y)$ est

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x-y>0, x+y>0, (x^2+y^2) \leq 1\}$$
$$\cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x-y>0, x+y<0, (x^2+y^2) \geq 1\}$$

Il est ni ouvert ni fermé et pas borné.

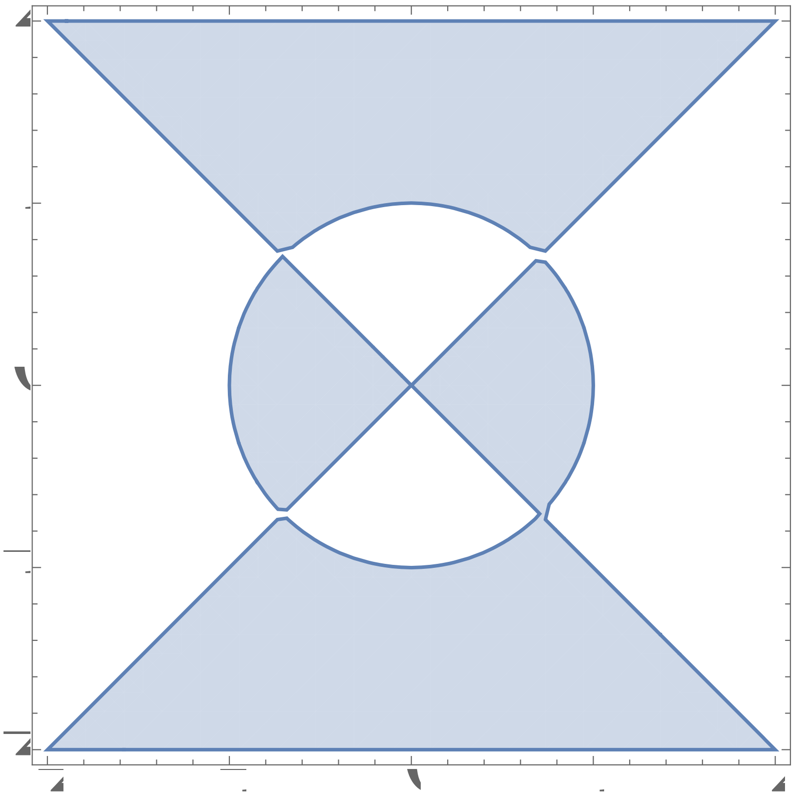

Figure 8: Ex.1.46, (vii).

Exercice 1.47

Représenter, sur un même graphique, le domaine de définition de f et les courbes de niveau k demandées. Pour (i) et (ii) on supposera $x > 0$ et $y > 0$.

(i) $f(x, y) = xy$, k quelconque. L'ensemble de définition de $f(x, y)$ est $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+\}$.

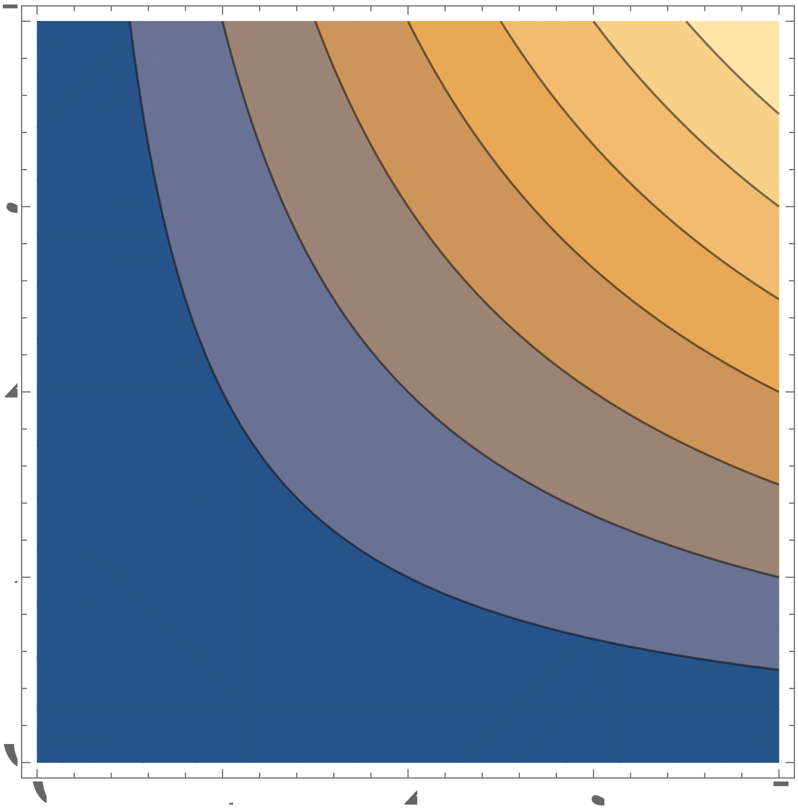

Figure 9: Ex.1.47, (i), l'ensemble de définition de $f(x,y) = xy$, D_f, est le demi-plan $\mathbb{R}^2_+$ et les courbes de niveau sont les hyperboles $xy = k$

(ii) $f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$, courbe de niveau pour $k = 2$. L'ensemble de définition de $f(x,y)$ est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | x^2y^2 \neq 8\}$.

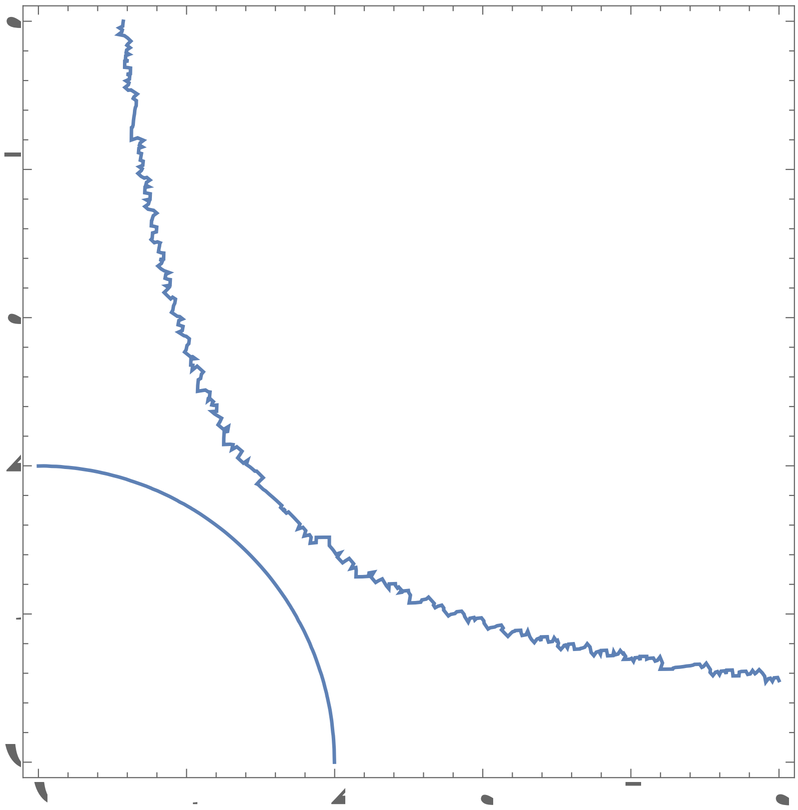

Figure 10: Ex.1.47, (ii), l'ensemble de définition de $f(x, y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y2}$, D_f, est $\mathbb{R}^2_+$ sauf l'hyperbole $xy = 2\sqrt{2}$ et la courbe de niveau pour k=2 est le quart de cercle $x^2 + y^2 = 2$ dans $\mathbb{R}^2_+$.

(iii) $f(x, y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$, courbe de niveau pour $k = 0$ et $k = -1$. L'ensemble de définition de $f(x, y)$ est $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | x + y^2 \neq 0\}$.

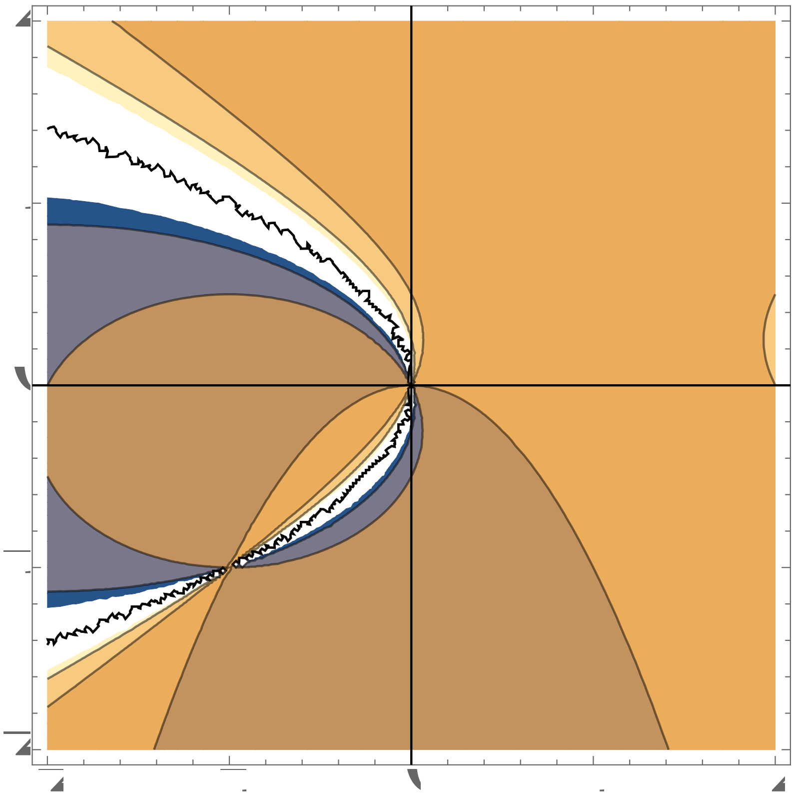

Figure 11: Ex.1.47, (iii), l'ensemble de définition de $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$, D_f, est $\mathbb{R}^2_+$ sauf la parabole $y^2 + x = 0$ centrée en l'axe des absicesse négatif et les courbes de niveau pour k=0 et k=-1 sont C_0 : $x^2 + y = 0$, la parabole centrée en l'axe des ordonnes négatif (noir en figure), et C_{-1} : $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ est le cercle centré en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(iv) $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$, courbes de niveau pour $k = 0$ et $k = -1$. L'ensemble de définition de $f(x,y)$ est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y^2 \neq 0\}$.

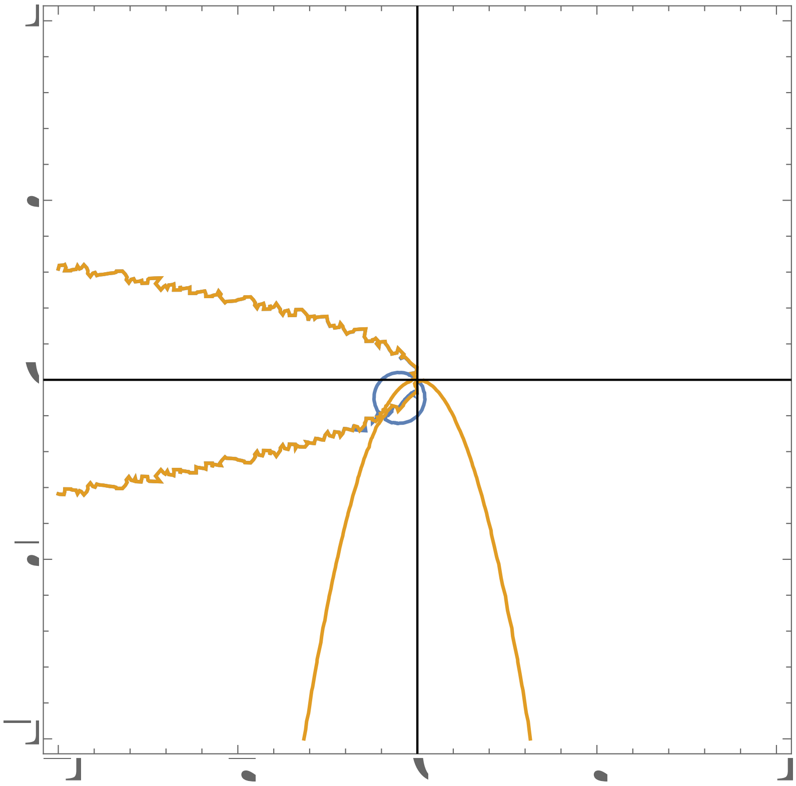

Figure 12: Ex.1.47, (iv), l'ensemble de définition de $f(x,y)=\frac{x^2+y}{x+y^2}$, D_f, est $\mathbb{R}^2$ sauf la parabole= $x+y^2=0$ (donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et centré en zero). La courbe de niveau pour $k=0$ est la parabole $x^2+y=0$ et la courbe de niveau pour $k=-1$ est le cercle $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$.

(v) $f(x,y)=\min(x,y)$, courbes de niveau pour tout k. L'ensemble de définition de $f(x,y)$ est $D_f=\mathbb{R}^2$.

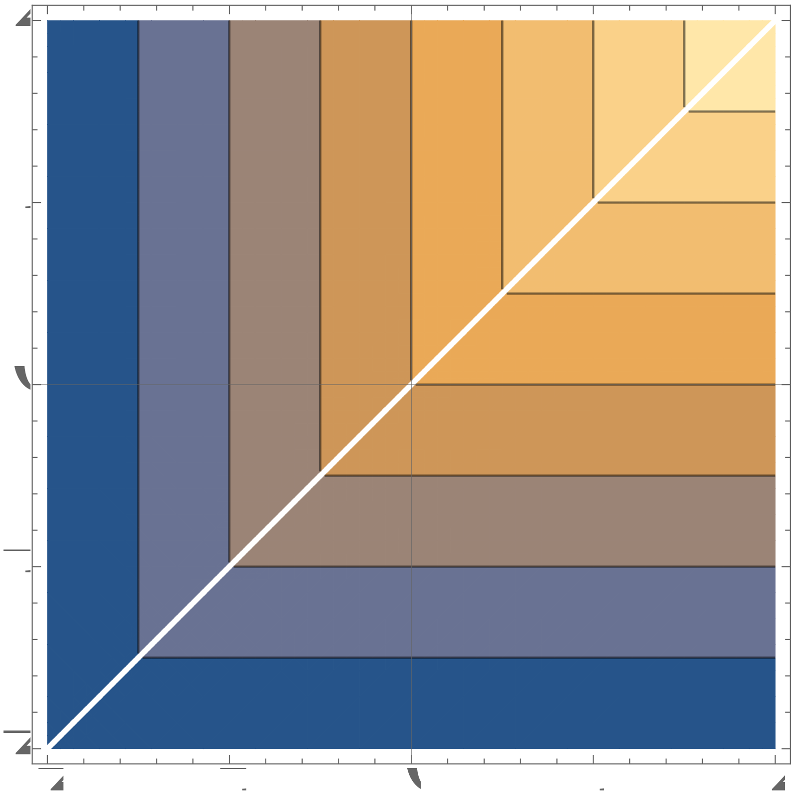

Figure 13: Ex.1.47, (v), l'ensemble de définition de $f(x, y) = \min(x, y)$, D_f, est $\mathbb{R}^2$. Les courbes de niveau pour tout k sont $min(x, y) = k$ donc $x = k$ si $x < y$ or $y = k$ si $y < x$.

Exercice 2.50 Soit

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

1. L'ensemble de définition est

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x + y \neq 0\}$$

   On admet qu?il est ouvert. D_f n'est convexe car si on considére deux points qui appartient aux deux demi-plans, par example $A \in x + y > 0$ et $B \in x + y < 0$, les segments $[A, B]$ possédent les points sur la droite $x + y = 0$

2. On détermine et on représente (14) les courbes de niveau C_k pour $k = -2$ et $k = 1$ avec D_f. Pour $k = -2$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = -2 \to (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

   on obtient le cercle centré en $(-1, -1)$ de rayon $\sqrt{2}$. Pour $k = 1$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 1 \to (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

on obtient le cercle centré en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

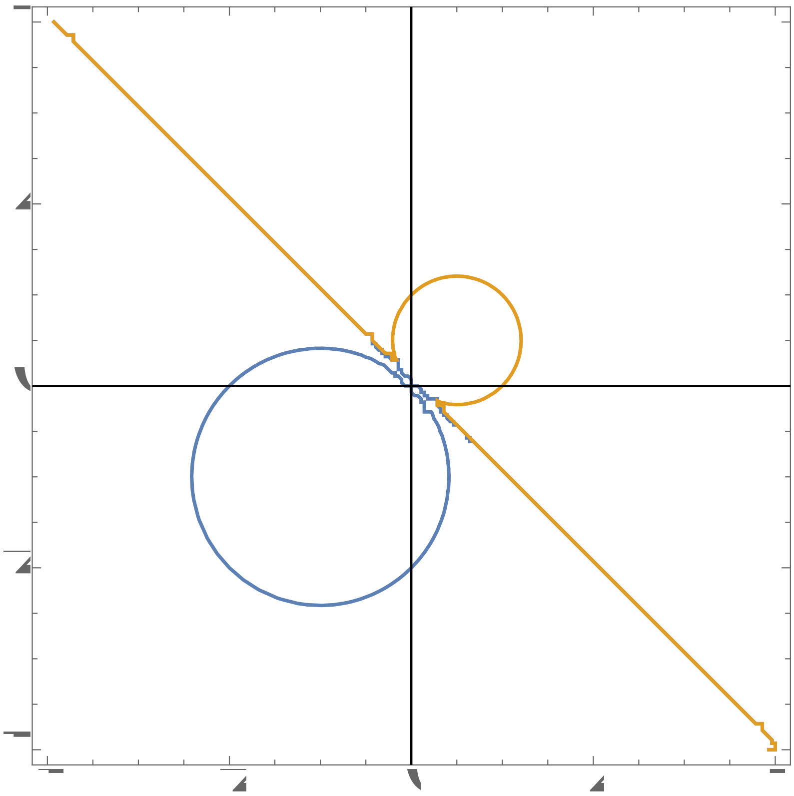

Figure 14: Ex.2.50, (2) − (1), l'ensemble de définition de $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$, D_f, est $\mathbb{R}^2$ sauf la droite $x + y = 0$. La courbe de niveau pour $k = -2$ est le cercle $(x+1)^2+(y+1)^2 = 2$ et la courbe de niveau pour $k = 1$ est le cercle $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.

3. La fonction est un fraction rationnel, donc C^1 sur D_f. Les dérivées partielles d'ordre 1 sont

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x+y)^2} \tag{2}$$

4. Le valeur approché est tel que $f(0.9, 1.2) \simeq \hat{f}_{(1,1)}(1 - 0.1, 1 + 0.2)$ et

$$\hat{f}_{(1,1)}(1 - 0.1, 1 + 0.2) = f(1, 1) + (-0.1)\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} + (0.2)\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} \tag{3}$$

$$= 1 - 0.1\frac{1}{2} + 0.2\frac{1}{2} = 1.05 \tag{4}$$

donc $f(0.9, 1.2) \simeq 1.05$. Le valeur obtenu par une calculatrice est 1.07

5. En chaque point (x, y), le vecteur gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau de la fonction, dirigé dans le sens des niveaux croissants. On déduit qu'il est facile de calculer les coordonnées d'un vecteur $V(x, y)$ tangent à une courbe de niveau de f en un point (x, y) : il suffit de choisir un vecteur dont le produit scalaire avec le vecteur gradient est nul $V(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = 0$. Donc pour $V(x, y) = (x - x_0, y - y_0)$,

$$(x-1, y-1) \cdot \nabla f(1,1) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) = 0$$

alors $x + y = 2$.

6. ...

7. ...

8. ...