Jeudi 19 décembre 2013.
Durée : 1 h 30.

Test n° 2
– Groupe 19 –

Soit f la fonction à deux variables x et y définie sur $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0, y > 0, y < -x+2\right\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{e^{-\sqrt{2-x-y}}}{\sqrt{xy}}.$$

Partie A
L'objectif de cette partie est de prouver que f possède un minimum global.

1) a) Représenter graphiquement D_f. *On hachurera le sous-ensemble demandé.*
   b) Le domaine de définition de f est-il un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ convexe ? borné ? Justifier.

2) Montrer que la fonction g définie par $g(x, y) = \ln\left(f(x, y)\right)$ est convexe.

3) a) Montrer que g est de classe C^2 sur D_f.
   b) Déterminer les dérivées partielles premières de g.
   c) Montrer que si (x, y) est un point critique de g, alors $\begin{cases} x = \sqrt{2-x-y} \\ y = \sqrt{2-x-y} \end{cases}$.
   d) Montrer que g possède un point critique.

4) Conclure.

Partie B
Dans cette partie, on suppose que x et y représentent des quantités économiques positives et que f est une fonction économique. Par ailleurs, on note w la fonction inverse de f et $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5) Montrer que $\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{xy}{2-x-y}}\right)\frac{e^{\sqrt{2-x-y}}}{2}, \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{xy}{2-x-y}}\right)\frac{e^{\sqrt{2-x-y}}}{2}$.

6) On note $e_{f/x}$ la fonction élasticité de f par rapport à x et $e_{f/y}$ la fonction élasticité de f par rapport à y.
   a) Calculer $w(A), \frac{\partial w}{\partial x}(A)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$.
   b) En déduire $e_{f/x}(A)$ puis $e_{f/y}(A)$.
   c) Déterminer une approximation de l'accroissement relatif de f au voisinage de A lorsque x décroît de 6 % et y croît de 4 %.

7) On suppose à présent qu'une contrainte économique se traduit par $y = 1$.
   a) Déterminer l'expression de la fonction h définie sur $]0,1[$ par $h(x) = f(x,1)$.
   b) Montrer que h possède un minimum global.