

Test n° 1
– Groupe 19 –

Soit f la fonction à deux variables x et y définie par :

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{4 - 4x - 2y}{x^2 + y^2 + 4 - 4x - 2y}}.$$

- 1) Dans cette partie, on hachurera les sous-ensembles demandés.
 - a) Représenter graphiquement le sous-ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 - 4x - 2y \geq 0\}$.
Ce sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ est-il convexe ? borné ? Justifier.
 - b) Représenter graphiquement le sous-ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + 4 - 4x - 2y < 0\}$.
Ce sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ est-il convexe ? borné ? Justifier.
 - c) Représenter graphiquement le domaine de définition, noté D_f , de la fonction f .
Montrer que D_f n'est ni convexe, ni borné.
- 2) Dans cette partie, on note C_k la courbe de niveau k (avec $k \in \mathbb{R}$) de la fonction f .
Déterminer C_0 , C_1 et $C_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
- 3) a) On admet que f est de classe C^1 sur un voisinage de $A = (-1; 2)$. Déterminer l'expression des dérivées premières de f .
b) Montrer que l'équation du plan tangent à la nappe représentative de f au point A est :

$$z = -\frac{1}{9}x - \frac{13}{54}y + \frac{28}{27}.$$

c) En déduire une approximation de $f\left(-1, 1; \frac{29}{13}\right)$.
- 4) a) Donner l'expression de la fonction f_A^1 . On rappelle que f_A^1 est définie par $f_A^1(x) = f(x, y_A)$.
b) Montrer que l'élasticité de la fonction f_A^1 a pour expression $e_{f_A^1}(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{x+2}{x-2}$.
c) On suppose dans cette question que f modélise la demande de la clientèle d'un certain produit (en millier d'unités) en fonction de x et y et que pour une certaine raison $y = 2$.
Déterminer alors une approximation de la variation relative de la demande lorsque x « passe » de la valeur -3 à la valeur $-3,03$ (soit une baisse de 1%).