

Test n° 2

Soit f et g deux fonctions économiques variables définies par $f(x; y) = e^{\frac{xy}{2}}$ et $g(x; y) = e^{\frac{1}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 8x + 8y - 31}}}$.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les parties de $\mathbb{R}^2$ sur lesquelles f est convexe.

- 1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
- 2) a) Montrer que f possède un unique point critique.
Dans la suite du problème, ce point sera noté A .
b) Calculer l'image de A , $f(1;1)$ et $f(-1;1)$.
c) Que peut-on en conclure quant à la convexité de f ?
- 3) Déterminer $D^2 f(x; y)$, la matrice hessienne de f en un point $(x; y)$.
- 4) a) Montrer que le déterminant de $D^2 f(x; y)$ est donné par $u(x; y) = -\frac{1}{4}e^{xy}(1 + xy)$.
b) Résoudre $u(x; y) > 0$ puis représenter l'ensemble des solutions.
- 5) Conclure.

Partie B

On suppose dans cette partie qu'une certaine contrainte économique se traduit par $y = 3 - \sqrt{x}$.

On note $\mathcal{O}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $\mathcal{O} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3 - \sqrt{x}\}$.

- 6) Montrer que $f|_{\mathcal{O}} = \varphi$ avec $\varphi(x) = e^{\frac{1}{2}(3x - x\sqrt{x})}$.
- 7) Montrer que φ possède un maximum global atteint en $x = 4$ et le déterminer.
- 8) On souhaite déterminer une approximation de la variation relative de φ en $x = 4$ lorsque x augmente de 5%.
a) Montrer que $\frac{\Delta \varphi}{\varphi(4)} \approx 0$.
b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de φ en $x = 4$.
c) Conclure.

Partie C

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction g possède un extremum global, atteint lorsque φ atteint son maximum global.

- 9) Montrer que g est définie sur la boule ouverte de centre $(4; 4)$ et de rayon 1.
- 10) Montrer que si v est une fonction concave à valeurs dans $]0; +\infty[$, alors $\frac{1}{v}$ est convexe.

On pourra considérer la fonction $\ln \circ v$.

- 11) En déduire que g est convexe. On pourra noter w la fonction polynomiale de degré 2 d'expression

$$w(x; y) = -x^2 - y^2 + 8x + 8y - 31.$$

- 12) Montrer que g est de classe C^1 puis déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1.
- 13) Conclure.