

Test n° 1

Soient f et g deux fonctions à deux variables x et y définies par :

$$f(x; y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 - 4} \text{ et } g(x; y) = \frac{x^2 + y^2 - xy - 2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 3}}.$$

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f (noté D_f) et le domaine de définition de g (noté D_g) puis les représenter.
b) Les ensembles D_f et D_g sont-ils des parties de $\mathbb{R}^2$ ouvertes ? fermées ? bornées ?
Aucune justification n'est demandée.
c) Les ensembles D_f et D_g sont-ils des parties de $\mathbb{R}^2$ convexes ?
Justifier votre réponse pour D_f ou D_g .
- 2) Déterminer puis représenter l'ensemble des solutions de l'équation $f(x; y) = g(x; y)$.
- 3) Dans cette partie, on note C_k la courbe de niveau k (avec $k \in \mathbb{R}$) de la fonction f .
 - a) A-t-on $B(7; 2\sqrt{2}) \subset C_{2\sqrt{10}}$?
 - b) Déterminer C_0 ; C_1 ; C_2 et C_k .
- 4) a) On admet que f est de classe C^1 sur un voisinage de $A(3; 4)$. Déterminer l'expression des dérivées partielles premières de f .
b) Montrer que le plan tangent à la nappe représentative de f au point A a pour équation
$$z = \frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}.$$
En déduire une approximation de $f(3,1; 4)$.
- 5) a) Déterminer l'expression puis le domaine de définition de la fonction f_A^1 .
On rappelle que f_A^1 est définie par $f_A^1(x) = f(x, y_A)$.
b) On admet que f_A^1 est de classe C^2 sur un voisinage de $x = 3$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_A^1 au point d'abscisse $x = 3$.
En déduire une approximation de $f_A^1(3, 1)$. Que remarque-t-on ?
c) Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de f_A^1 au point d'abscisse $x = 3$.
En déduire une nouvelle approximation de $f_A^1(3, 1)$.
Comparer cette approximation avec celle obtenue à la question précédente.