

Test n° 2

- 1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $u(x; y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$.
 - a) Montrer que u est convexe.
 - b) Montrer que u possède un extremum global et le déterminer.
 - c) Déterminer C_8 , la courbe de niveau 8 de la fonction u .

- 2) Soit v la fonction définie sur $\mathcal{D} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$ par $v(x; y) = e^{\frac{x+y}{xy}}$.
 - a) Montrer que v est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$.
 - b) Montrer que v est convexe.
 - c) La fonction v possède-t-elle un extremum sur $\mathcal{D}$?

- 3) Soit f la fonction définie par $f(x; y) = u(x; y) \times v(x; y) = (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4)e^{\frac{x+y}{xy}}$.
L'objectif de cette question est de prouver que la fonction f , produit de deux fonctions convexes sur $\mathcal{D}$ n'est pas convexe sur $\mathcal{D}$.
 - a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$.
 - b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
 - c) Déterminer l'équation de $\Pi_{(2;1)}$, plan tangent à la surface représentative de f au point $(2;1)$.
 - d) On note k la fonction affine qui admet pour représentation graphique $\Pi_{(2;1)}$.
Calculer $f(1;1), k(1;1)$.
 - e) Sachant que $f(2; \frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}e^{\frac{7}{6}} \approx -2,4$, $k(2; \frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} \approx -2,2$, que peut-on déduire de la question précédente ? Justifier soigneusement.

Dans la suite du problème on suppose que x et y représentent des quantités économiques et que f est une fonction économique définie sur $\mathcal{D}$.

- 4) On note $e_{f/x}$ la fonction élasticité de f par rapport à x et $e_{f/y}$ la fonction élasticité de f par rapport à y .
 - a) Déterminer, pour tout $x, y \in \mathcal{D}$, $e_{f/x}(x; y)$ et $e_{f/y}(x; y)$.
 - b) En déduire une approximation de l'accroissement relatif de f au voisinage de $(2;1)$ lorsque x croît de 2 % et y diminue de 3 %.

- 5) On suppose à présent qu'une contrainte économique se traduit par $x = 1$.
 - a) Déterminer l'expression de la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(y) = f(1; y)$.
 - b) Prouver que φ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.
 - c) Calculer une approximation de l'accroissement relatif de φ au voisinage de $y = 2$ si y augmente de 1,2 %.