

Exercice 1

On note f la fonction définie pour tout $(x; y)$ de $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ par $f(x; y) = x + y + \frac{1}{xy}$.
On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition, que l'on note C .

1. Justifier que C est un convexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f est une fonction convexe sur C .
3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1; 1; 3)$ et préciser la position de ce plan par rapport à la surface de f , au voisinage de ce point.

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x; y) = 1 - e^x + e^{xy}$ pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier brièvement que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la courbe de niveau 1 de la fonction f est la réunion de deux droites que l'on précisera ; donner un vecteur directeur de chacune de ces droites.
3. Quelle est la matrice hessienne de f en un point $(x; y)$ quelconque de $\mathbb{R}^2$?
- 4.a. Vérifier que le point $A(0; -3; 1)$ appartient à la surface représentative de f .
- 4.b. Soit $(\mathcal{P})$ le plan tangent au graphe de f en A . Étudier la position de $(\mathcal{P})$ par rapport au graphe de f au voisinage de A . *On vérifiera que le hessien de f en $(0; -3)$ est égal à -1 .*
- 4.c. Expliquer pourquoi le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(-4; 0; -1)$ est orthogonal à $(\mathcal{P})$.
5. Démontrer que f n'admet aucun extremum, ni local ni global, sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Soit g la fonction définie par $g(x; y) = x^3 + xy^2$ pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$. On admet que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.

- 1.a. Donner le développement limité de g en $(1; 1)$ à l'ordre 2.
- 1.b. En déduire une valeur décimale approchée de $g(1,1; 0,8)$ à l'ordre 1, puis à l'ordre 2.
- 2.a. Calculer les élasticités partielles de g en tout point de $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.
- 2.b. On suppose que la variable x augmente de 10 % à partir de 1 et que la variable y diminue de 5 % à partir de 2. Montrer que g augmente alors de 6 % environ.
- 2.c. En un point $(a; a)$ quelconque de $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, donner une égalité approchée qui lie la variation relative de g aux variations relatives de x et de y .
- 2.d. Que dire de la variation relative de g si $(x; y)$ passe de $(3; 3)$ à $(2,97; 3,06)$?
3. Déterminer l'unique point critique de g sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer le hessien de g en ce point. Ce calcul suffit-il pour déterminer si ce point critique est un point en lequel g admet un extremum ?