Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 10 DÉCEMBRE AU 16 DÉCEMBRE

Exercice 1

On note g la fonction de deux variables réelles vérifiant $g(x\,;y) = xy\ln y$.

1. Donner l'ensemble de définition de g puis expliquer brièvement pourquoi la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ensemble.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.

3. On suppose que la variable x augmente de $2\,\%$ et que la variable y reste constante. De quel pourcentage approximatif va varier $g(x\,;y)$?

4. L'ensemble de définition de g est-il convexe ? Sur cet ensemble, la fonction g est-elle convexe ? concave ? On justifiera précisément les réponses.

Exercice 2

La *surface corporelle* d'un être humain, souvent utilisée pour le dosage de certains médicaments, est la surface externe de la peau recouvrant le corps. Il est possible de la calculer à l'aide de la *formule de Mosteller*, proposée en 1987, dans laquelle S est la surface corporelle en mètres carrés, T la taille en centimètres et M la masse en kilogrammes :

$$S = \frac{\sqrt{TM}}{60}.$$

On note f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par $f(x\,;y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{60}$.

1. Calculer la surface corporelle d'un homme de 80 kg mesurant 1,80 m.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

3. Calculer les élasticités partielles de f.

4.a. Au 1^{er} septembre, la balance de Béatrice indiquait 50 kg. Depuis, Béatrice a grossi de 5 kg et sa taille est restée constante. Donner une approximation de la variation relative de la surface corporelle de Béatrice entre le 1^{er} septembre et aujourd'hui.

4.b. Il y a six mois, le petit Paul pesait 20 kg et mesurait 1,20 m. Hier, lors d'une visite pour un vaccin, son médecin a indiqué 22 kg pour 1,26 m. De quel pourcentage approximatif la surface corporelle de Paul a-t-elle varié entre les deux dates ?

4.c. Suite à un régime, Alexandra est passée de 60 kg à 57 kg, mais sa surface corporelle n'a pas été modifiée. Que s'est-il passé ? Aujourd'hui, Alexandra mesure 1,68 m. Quelle était sa taille avant son régime ? On demande un calcul approché.

Exercice 3

Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x\,;y) = x + xy + \exp(yx^2)$, ainsi qu'une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1\,;0\,;2)$.

Étudier la position du plan tangent par rapport à la surface de f au voisinage de $(1\,;0\,;2)$.

Exercice 4

On note f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par $f(x\,;y)=x+y+\dfrac{1}{xy}$. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition, que l'on note C.

1. Justifier que C est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

2. Démontrer que f est une fonction convexe sur C.

3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1\,;1\,;3)$ et préciser la position de ce plan par rapport à la surface de f, au voisinage de ce point.

Exercice 5

On considère l'application f définie par $f(x\,;y)=1-e^x+e^{xy}$ pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier brièvement que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la courbe de niveau 1 de la fonction f est la réunion de deux droites que l'on précisera ; donner un vecteur directeur de chacune de ces droites.

3. Quelle est la matrice hessienne de f en un point $(x\,;y)$ quelconque de $\mathbb{R}^2$?

4.a. Vérifier que le point $A(0\,;-3\,;1)$ appartient à la surface représentative de f.

4.b. Soit $(\mathcal{P})$ le plan tangent au graphe de f en A. Étudier la position de $(\mathcal{P})$ par rapport au graphe de f au voisinage de A. *On vérifiera que le hessien de f en $(0\,;-3)$ est égal à -1.*

4.c. Expliquer pourquoi le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(-4\,;0\,;-1)$ est orthogonal à $(\mathcal{P})$.

5. Démontrer que f n'admet aucun extremum, ni local ni global, sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Soit g la fonction définie par $g(x\,;y)=x^3+xy^2$ pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$. On admet que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.

1.a. Donner le développement limité de g en $(1\,;1)$ à l'ordre 2.

1.b. En déduire une valeur décimale approchée de $g(1{,}1\,;0{,}8)$ à l'ordre 1, puis à l'ordre 2.

2.a. Calculer les élasticités partielles de g en tout point de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

2.b. On suppose que la variable x augmente de 10 % à partir de 1 et que la variable y diminue de 5 % à partir de 2. Montrer que g augmente alors de 6 % environ.

2.c. En un point $(a\,;a)$ quelconque de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$, donner une égalité approchée qui lie la variation relative de g aux variations relatives de x et de y.

2.d. Que dire de la variation relative de g si $(x\,;y)$ passe de $(3\,;3)$ à $(2{,}97\,;3{,}06)$?

3. Déterminer l'unique point critique de g sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer le hessien de g en ce point. Ce calcul suffit-il pour déterminer si ce point critique est un point en lequel g admet un extremum ?

Exercice 7

Soit f la fonction définie pour tout réel x et tout réel y par $f(x\,;y)=x^3+xy^2$. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(2\,;1\,;10)$, puis au point $(1\,;2\,;5)$. Étudier la position du plan tangent par rapport à la surface de f au voisinage des deux points précédents.