Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^er^ **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 10 DÉCEMBRE AU 16 DÉCEMBRE

Exercice 1

On note g la fonction de deux variables réelles vérifiant $g(x\,;y) = xy\ln y$.

1. Donner l'ensemble de définition de g puis expliquer brièvement pourquoi la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ensemble.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.

3. On suppose que la variable x augmente de $2\,\%$ et que la variable y reste constante. De quel pourcentage approximatif va varier $g(x\,;y)$?

4. L'ensemble de définition de g est-il convexe ? Sur cet ensemble, la fonction g est-elle convexe ? concave ? On justifiera précisément les réponses.

Exercice 2

La *surface corporelle* d'un être humain, souvent utilisée pour le dosage de certains médicaments, est la surface externe de la peau recouvrant le corps. Il est possible de la calculer à l'aide de la *formule de Mosteller*, proposée en 1987, dans laquelle S est la surface corporelle en mètres carrés, T la taille en centimètres et M la masse en kilogrammes :

$$S = \frac{\sqrt{TM}}{60}.$$

On note f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par $f(x\,;y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{60}$.

1. Calculer la surface corporelle d'un homme de 80 kg mesurant 1,80 m.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

3. Calculer les élasticités partielles de f.

4.a. Au 1^er^ septembre, la balance de Béatrice indiquait 50 kg. Depuis, Béatrice a grossi de 5 kg et sa taille est restée constante. Donner une approximation de la variation relative de la surface corporelle de Béatrice entre le 1^er^ septembre et aujourd'hui.

4.b. Il y a six mois, le petit Paul pesait 20 kg et mesurait 1,20 m. Hier, lors d'une visite pour un vaccin, son médecin a indiqué 22 kg pour 1,26 m. De quel pourcentage approximatif la surface corporelle de Paul a-t-elle varié entre les deux dates ?

4.c. Suite à un régime, Alexandra est passée de 60 kg à 57 kg, mais sa surface corporelle n'a pas été modifiée. Que s'est-il passé ? Aujourd'hui, Alexandra mesure 1,68 m. Quelle était sa taille avant son régime ? On demande un calcul approché.

Exercice 3

Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x\,;y) = x + xy + \exp(yx^2)$, ainsi qu'une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1\,;0\,;2)$.

Étudier la position du plan tangent par rapport à la surface de f au voisinage de $(1\,;0\,;2)$.

Exercice 4

On note f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par $f(x\,;y)=x+y+\dfrac{1}{xy}$. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition, que l'on note C.

1. Justifier que C est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

2. Démontrer que f est une fonction convexe sur C.

3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1\,;1\,;3)$ et préciser la position de ce plan par rapport à la surface de f, au voisinage de ce point.

Exercice 5

On considère l'application f définie par $f(x\,;y)=1-e^x+e^{xy}$ pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier brièvement que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la courbe de niveau 1 de la fonction f est la réunion de deux droites que l'on précisera ; donner un vecteur directeur de chacune de ces droites.

3. Quelle est la matrice hessienne de f en un point $(x\,;y)$ quelconque de $\mathbb{R}^2$?

4.a. Vérifier que le point $A(0\,;-3\,;1)$ appartient à la surface représentative de f.

4.b. Soit $(\mathcal{P})$ le plan tangent au graphe de f en A. Étudier la position de $(\mathcal{P})$ par rapport au graphe de f au voisinage de A. *On vérifiera que le hessien de f en $(0\,;-3)$ est égal à -1.*

4.c. Expliquer pourquoi le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(-4\,;0\,;-1)$ est orthogonal à $(\mathcal{P})$.

5. Démontrer que f n'admet aucun extremum, ni local ni global, sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Soit g la fonction définie par $g(x\,;y)=x^3+xy^2$ pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$. On admet que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.

1.a. Donner le développement limité de g en $(1\,;1)$ à l'ordre 2.

1.b. En déduire une valeur décimale approchée de $g(1{,}1\,;0{,}8)$ à l'ordre 1, puis à l'ordre 2.

2.a. Calculer les élasticités partielles de g en tout point de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

2.b. On suppose que la variable x augmente de 10 % à partir de 1 et que la variable y diminue de 5 % à partir de 2. Montrer que g augmente alors de 6 % environ.

2.c. En un point $(a\,;a)$ quelconque de $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$, donner une égalité approchée qui lie la variation relative de g aux variations relatives de x et de y.

2.d. Que dire de la variation relative de g si $(x\,;y)$ passe de $(3\,;3)$ à $(2{,}97\,;3{,}06)$?

3. Déterminer l'unique point critique de g sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer le hessien de g en ce point. Ce calcul suffit-il pour déterminer si ce point critique est un point en lequel g admet un extremum ?

Exercice 7

Soit f la fonction définie pour tout réel x et tout réel y par $f(x\,;y)=x^3+xy^2$. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(2\,;1\,;10)$, puis au point $(1\,;2\,;5)$. Étudier la position du plan tangent par rapport à la surface de f au voisinage des deux points précédents.

Exercice 4

1. L'ensemble C est le $\boxed{\text{produit cartésien de deux intervalles de } \mathbb{R}}$; c'est donc une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

2. Comme la fonction $(x\,;y) \mapsto x+y$ est affine, elle est convexe sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur C. Ainsi, afin de montrer que la fonction f est convexe sur C, il suffit de prouver que la fonction h, définie pour tout $(x\,;y)$ de C par $h(x\,;y) = \dfrac{1}{xy}$, est convexe sur C.

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur C comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur C ; ses dérivées partielles premières et secondes existent donc et vérifient, pour tout $(x\,;y)$ de C :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x\,;y) = \frac{-1}{x^2y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x\,;y) = \frac{-1}{xy^2}.$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x\,;y) = \frac{2}{x^3y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x\,;y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x\,;y) = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x\,;y) = \frac{2}{xy^3}.$$

En utilisant les notations de Monge, on peut affirmer que $rt - s^2$ vaut $\dfrac{3}{x^4y^4}$ quels que soient les réels strictement positifs x et y.

On peut donc en déduire que h est convexe sur C ; en effet :

$$\forall (x\,;y) \in \,]0\,;+\infty[^2, \begin{cases} rt - s^2 \geqslant 0 \\ r \geqslant 0 \\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une fonction convexe sur }]0\,;+\infty[^2.}$$

3. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur C, les dérivées partielles premières de f existent en tout point $(x\,;y)$ de C et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = 1 - \frac{1}{x^2y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = 1 - \frac{1}{xy^2}.$$

En particulier :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,;1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1\,;1) = 0.$$

Nous savons qu'une équation du plan cherché est :

$$z = f(1\,;1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1\,;1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1\,;1)(y-1).$$

Cette équation se réécrit :

$$\boxed{z = 3.}$$

Étant donné que la fonction f est convexe, la surface représentative de f est située au-dessus de tous les plans tangents à cette surface.

$$\boxed{\text{La surface de } f \text{ est située au-dessus du plan d'équation } z = 3.}$$

Exercice 5

1. Les fonctions $(x\,;y) \mapsto x$ et $(x\,;y) \mapsto xy$ sont des fonctions polynomiales : elles sont donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut conclure au caractère de classe $\mathcal{C}^2$ des fonctions $(x\,;y) \mapsto e^x$ et $(x\,;y) \mapsto e^{xy}$, par composition.

Enfin, par somme avec la fonction constante égale à 1, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

2. La courbe de niveau 1 de f, notée $\mathcal{C}_1$, est telle que :

$$\mathcal{C}_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, 1 - e^x + e^{xy} = 1\}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, e^x = e^{xy}\}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x = xy\}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x(1-y) = 0\}.$$

La courbe cherchée est la réunion des droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = 1$.
Un vecteur directeur de la droite d'équation $x = 0$ est $(0\,;-2)$;
un vecteur directeur de la droite d'équation $y = 1$ est $(3\,;0)$.

3. Pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$, la hessienne s'écrit, après calculs non détaillés ici :

$$\boxed{(D^2f)(x\,;y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} - e^x & (1+xy)e^{xy} \\ (1+xy)e^{xy} & x^2e^{xy} \end{pmatrix}}.$$

4.a. On a $f(0\,;-3) = 1$ donc $\boxed{\text{le point } A \text{ appartient à la surface représentative de } f}$, que nous noterons $(\mathcal{S}_f)$.

4.b. Afin d'étudier la position de $(\mathcal{P})$ par rapport à $(\mathcal{S}_f)$ au voisinage de A, on peut étudier le signe du hessien de f en $(0\,;-3)$. D'après la question précédente, on a :

$$(D^2f)(0\,;-3) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice précédente est égal à -1 : il est donc négatif.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (\mathcal{P}) \text{ traverse } (\mathcal{S}_f) \text{ au voisinage de } A.}$$

4.b. Une équation du plan tangent à $(\mathcal{S}_f)$ en A est :

$$z = f(0\,;-3) + \frac{\partial f}{\partial x}(0\,;-3) \times (x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0\,;-3) \times (y+3).$$

Or, en tout point $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = ye^{xy} - e^x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = xe^{xy}.$$

Ainsi, l'équation précédente se réécrit :

$$z = 1 - 4x.$$

Ou encore :

$$\boxed{-4x - z + 1 = 0.}$$

On sait que, dans $\mathbb{R}^3$, si un plan a une équation de type $ax+by+cz+d=0$, alors le vecteur $(a\,;b\,;c)$ est un vecteur othogonal à ce plan. $\boxed{\text{Ainsi, le vecteur } (-4\,;0\,;-1) \text{ est orthogonal à } (\mathcal{P}).}$

5. Supposons que f admette un extremum en un point $(a\,;b)$ de $\mathbb{R}^2$. Le point $(a\,;b)$ est alors un point critique de f. Nous avons donc les deux égalités suivantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a\,;b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a\,;b) = 0.$$

$$be^{ab} - e^a = 0 \quad \text{et} \quad ae^{ab} = 0.$$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, il vient :

$$e^a = be^{ab} \quad \text{et} \quad a = 0.$$

Finalement, le seul point en lequel f peut avoir un extremum est le point $(0\,;1)$. Or, en ce point, la matrice hessienne de f est :

$$(D^2 f)(0\,;1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le hessien de f en $(0\,;1)$ est égal à -1. Étant donné le signe du hessien, on peut conclure que $(0\,;1)$ est un point col pour f.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Le seul point critique de } f \text{ est } (0\,;1)\text{, or } (0\,;1) \text{ est un point col pour } f. \\ \text{La fonction } f \text{ n'admet donc aucun extremum sur } \mathbb{R}^2.\end{array}}$$

Exercice 6

1.a. Avec les notations de Monge, pour tout réel x et tout réel y :

$$p = \frac{\partial g}{\partial x}(x\,;y) = 3x^2 + y^2 \text{ et } q = \frac{\partial g}{\partial y}(x\,;y) = 2xy.$$

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x\,;y) = 6x \text{ et } s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x\,;y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x\,;y) = 2y \text{ et } t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x\,;y) = 2x.$$

En particulier, au point $(1\,;1)$:

$$g(1\,;1) = 2, \quad p = 4, \quad q = 2, \quad r = 6, \quad s = 2 \quad \text{et} \quad t = 2.$$

Il existe donc une fonction ε qui vérifie, pour tout couple de réels $(h\,;k)$:

$$g(1+h\,;1+k) = 2 + 4h + 2k + \frac{1}{2}\left(6h^2 + 2 \times 2hk + 2k^2\right) + (h^2+k^2)\varepsilon(h\,;k).$$

$$\boxed{\begin{array}{l}g(1+h\,;1+k) = 2 + 4h + 2k + 3h^2 + 2hk + k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h\,;k) \\ \hfill \text{avec } \displaystyle\lim_{(h;k)\to(0;0)} \varepsilon(h\,;k) = 0.\end{array}}$$

1.b. D'après la question précédente, lorsque h et k sont proches de 0 :

$$g(1+h\,;1+k) \approx 2+4h+2k \text{ à l'ordre 1}$$
$$\text{et } g(1+h\,;1+k) \approx 2+4h+2k+3h^2+2hk+k^2 \text{ à l'ordre 2.}$$

Ainsi, nous avons, en posant $h = 0{,}1$ et $k = -0{,}2$:

$$\boxed{\begin{array}{c} g(1{,}1\,;0{,}8) \approx 2 \text{ à l'ordre 1} \\ \text{et } g(1{,}1\,;0{,}8) \approx 2{,}03 \text{ à l'ordre 2.} \end{array}}$$

2.a. La fonction g est strictement positive sur $]0\,;+\infty[^2$ et pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;+\infty[^2$:

$$e_{g/x}(x\,;y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x\,;y) \times \frac{x}{g(x\,;y)} \qquad \text{et} \qquad e_{g/y}(x\,;y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x\,;y) \times \frac{y}{g(x\,;y)}.$$

$$\boxed{e_{g/x}(x\,;y) = \frac{3x^3+xy^2}{x^3+xy^2} \qquad \text{et} \qquad e_{g/y}(x\,;y) = \frac{2xy^2}{x^3+xy^2}.}$$

2.b. En tout point $(a\,;b)$ de $]0\,;+\infty[^2$, et si h et k sont deux réels assez proches de 0 vérifiant $(a+h\,;b+k) \in\,]0\,;+\infty[^2$:

$$\frac{g(a+h\,;b+k)-g(a\,;b)}{g(a\,;b)} \approx e_{g/x}(a\,;b) \times \frac{a+h-a}{a} + e_{g/y}(a\,;b) \times \frac{b+k-b}{b}.$$

L'énoncé nous donne :

$$(a\,;b) = (1\,;2) \qquad \text{et} \qquad \frac{a+h-a}{a} = 10\,\% \qquad \text{et} \qquad \frac{b+k-b}{b} = -5\,\%.$$

On a donc, en utilisant notamment les élasticités calculées à la question précédente :

$$\frac{g(a+h\,;b+k)-g(a\,;b)}{g(a\,;b)} \approx \frac{7}{5} \times 10\,\% + \frac{8}{5} \times (-5\,\%).$$

$$\boxed{\frac{g(a+h\,;b+k)-g(a\,;b)}{g(a\,;b)} \approx 6\,\%.}$$

2.c. Lorsque $a = b$, les élasticités partielles de g se simplifient. Avec les mêmes conditions d'application qu'à la question précédente, l'approximation devient :

$$\frac{g(a+h\,;a+k)-g(a\,;a)}{g(a\,;a)} \approx 2 \times \frac{a+h-a}{a} + 1 \times \frac{a+k-a}{a}.$$

Ainsi, la variation relative de g est approximativement égale au double de la variation relative de x auquel on ajoute la variation relative de y.

2.d. Nous avons $a = b = 3$: nous sommes donc dans le cas de la question précédente. La variation relative de x vaut $\dfrac{2{,}97-3}{3}$, c'est-à-dire $-1\,\%$; la variation relative de y vaut $\dfrac{3{,}06-3}{3}$, c'est-à-dire $2\,\%$:

$$\frac{g(a+h\,;a+k)-g(a\,;a)}{g(a\,;a)} \approx 2\times(-1\,\%)+1\times 2\,\% \approx 0.$$

$\boxed{\text{La variation relative de } g \text{ est presque nulle si } x \text{ passe de 3 à 2,97 et } y \text{ passe de 3 à 3,06.}}$

3. D'après la question **1.**, les points critiques de g sont les éléments $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les équations $3x^2+y^2=0$ et $2xy=0$. La première équation n'est satisfaite que pour $x=y=0$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique point critique de } g \text{ est } (0\,;0).}$

On remarque que la matrice hessienne de g en $(0\,;0)$ n'est constituée que de zéros.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Le hessien de } g \text{ en } (0\,;0) \text{ est donc nul.}\\ \text{Il n'est pas possible de conclure quant à la nature de } (0\,;0) \text{ à l'aide de ce calcul.}\end{array}}$$