Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 3 DÉCEMBRE AU 9 DÉCEMBRE

Exercice 1 (problème)

On appelle f la fonction de deux variables réelles vérifiant $f(x\,;y) = \ln(x(y-x))$, et on note $\mathcal{S}$ sa surface représentative dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$.

1.a. Représenter graphiquement l'ensemble de définition de f, que l'on notera D.

1.b. L'ensemble D est-il un convexe de $\mathbb{R}^2$? Justifier soigneusement la réponse.

1.c. Sans justification, dire si D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si D est un borné de $\mathbb{R}^2$.

2. À l'aide d'opérations sur les fonctions usuelles, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

3.a. Démontrer que le gradient de f ne s'annule en aucun point de D.

3.b. Déterminer les points de D en lesquels le gradient de f vaut $(0\,;2)$.

4.a. Vérifier le théorème de Schwarz en calculant les expressions de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

4.b. Donner la hessienne de f en tout point $(x\,;y)$ de D.

On pose $A = (-1\,;-2\,;0)$ et on note $\mathcal{P}$ le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point A.

5.a. Donner une équation de $\mathcal{P}$.

5.b. Montrer que le hessien de f au point $(-1\,;-2)$ est égal à 1.

5.c. En déduire la position relative de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{S}$, au voisinage de A.

On note φ la fonction définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = x + x^{-1}$.

6.a. Vérifier que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, le couple $(x\,;\varphi(x))$ est dans D.

6.b. Que vaut $f(x\,;\varphi(x))$ si x est un réel strictement positif ?

6.c. Calculer φ' et établir que pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi'(x) = -\dfrac{f'_x(x\,;y)}{f'_y(x\,;y)}$ avec $y = \varphi(x)$.

7.a. Donner l'expression de l'élasticité de φ et étudier le signe de cette élasticité.

7.b. Donner une approximation de la variation relative de $\varphi(x)$ lorsque x passe de 3 à 3,3.

7.c. Pour quelles valeurs de x l'élasticité de φ est-elle égale à 0,6 ?

Exercice 2

Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x\,;y) = y^2 - x^2 + \ln(x^2)$, ainsi qu'une équation du plan tangent à la surface représentative de f, au point A de coordonnées $(1\,;2\,;3)$.

Étudier la position du plan tangent par rapport à la surface de f au voisinage de A.

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1er **cycle**

PREMIER DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU DU GROUPE 4

Exercice 1 [5 points]

Soit $E_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ -5 \leqslant x^2 - 6y + y^2 \leqslant 0\}$ et $E_2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0 \text{ et } y - x < 0\}$. *Sans justifier*, dire si chacun de ces ensembles est ouvert, fermé, borné, convexe, compact.

Exercice 2 [6 points]

On note f la fonction définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2(1+\ln x)$. La représentation graphique de f dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé est notée C_f.

1. Expliquer brièvement pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]0\,;+\infty[$.

2. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à $f^{(4)}$. En déduire qu'il existe une fonction ε vérifiant, pour tout h de $]-1\,;+\infty[$:

$$f(1+h) = 2 + 6h + 5h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{6}h^4 + h^4\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

3. Donner une équation de la tangente à C_f au point $(1\,;2)$. Préciser la position de cette tangente par rapport à C_f au voisinage de $(1\,;2)$.

4.a. Calculer l'élasticité de f en précisant l'ensemble sur lequel elle est définie.

4.b. Lorsque x passe de 1 à 1,02, de quel pourcentage approximatif varie $f(x)$?

4.c. Si x vaut initialement 1 et que l'on souhaite que $f(x)$ augmente de 12 %, quelle doit être approximativement la variation de x ? On donnera la variation absolue et la variation relative.

Exercice 3 [3,5 points]

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. Effectuer une étude précise des extremums de g.

2. Déterminer l'approximation affine de g en 2, puis l'utiliser pour donner une valeur décimale approchée de $g(2{,}05)$.

Exercice 4 [3,5 points]

On note f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;y) = 10 - x^2 - y^2 + 2x$. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$. On pose également $A = (-2\,;1)$ et $B = (2\,;3)$.

1. Calculer le gradient de f en tout point $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

2. On note $\vec{a}$ le gradient de f en A et $\vec{b}$ le gradient de f en B.
Montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.

3.a. Déterminer la nature de la courbe de niveau 0 de f, notée $\mathscr{C}$.

3.b. Justifier précisément que $\mathscr{C}$ n'est pas convexe, puis que $\mathscr{C}$ est borné.

Exercice 5 [2 points]

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $R = (1\,;0\,;-1)$, $S = (5\,;2\,;1)$ et $T = (-3\,;-4\,;1)$.

1. Donner une équation du plan orthogonal à $\overrightarrow{RS}$ et passant par T.

2. Donner une équation de la sphère de centre R et de rayon ST.