Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1er **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 26 NOVEMBRE AU 2 DÉCEMBRE

Exercice 1

On note f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;y) = x^2y^2 + 2xy - 3x^2 + 1$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les dérivées partielles premières de f puis les dérivées partielles secondes de f.

3. Le théorème de Schwarz est-il vérifié ?

Exercice 2

On note g la fonction de deux variables réelles définie par $g(x\,;y) = \ln(y^3 + x^2y - y)$.

1.a. Quel est l'ensemble de définition de g ? Le dessiner.

1.b. Démontrer que l'ensemble de définition de g n'est ni convexe, ni borné.

2. Donner le développement limité d'ordre 1 de g au voisinage de $(1\,;1)$.

3. Quelle est une équation du plan tangent à la surface représentative de g au point $(1\,;1\,;0)$?

4. Utiliser la question **2.** pour donner une valeur décimale approchée de $g(0{,}8\,;1{,}1)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x\,;y) = \dfrac{3x}{x+y}$ pour tous les réels x et y vérifiant $x + y \neq 0$.

1. Dire brièvement pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

2.a. Donner l'expression du gradient de f.

2.b. En utilisant la question précédente, estimer la différence $f(0{,}9\,;-2{,}2) - f(1\,;-2)$.

3.a. Calculer les élasticités partielles de f.

3.b. La variable x, initialement égale à 2, diminue de 6 % ; dans le même temps, la variable y, initialement égale à 1, augmente de 9 %. À l'aide d'un calcul approché, déterminer la variation relative de $f(x\,;y)$ liée à ces variations.

4. Lorsque $(x\,;y)$ passe de $(1\,;1)$ à $(1{,}01\,;0{,}97)$, quelle est approximativement la variation de $f(x\,;y)$? On donnera la variation absolue et la variation relative.

Exercice 4

On note φ et ψ les fonctions de deux variables réelles définies respectivement par :

$$\varphi(x\,;y) = \frac{2x^2}{y} \quad \text{et} \quad \psi(x\,;y) = \frac{2y}{x^3}.$$

Donner l'ensemble de définition de φ puis calculer ses dérivées partielles premières et secondes. Faire de même pour ψ.

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

PREMIER DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU DU GROUPE 19

Exercice 1 [4,5 points]

On note φ la fonction définie pour tout réel x par $\varphi(x) = x - \sqrt{8 + x^2}$. On admet que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que φ' ne s'annule pas. Que peut-on alors dire des extremums de φ ? Justifier.

2.a. Établir le développement limité de φ à l'ordre 1 en 1.

2.b. En déduire une valeur décimale approchée de $\varphi(1{,}09)$.

2.c. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de φ au point d'abscisse 1.

Exercice 2 [4,5 points]

Soit g la fonction définie par $g(x) = (1 + x)e^{\frac{-1}{x}}$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

1. Sans calculer la dérivée de g, montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

2. Calculer l'expression $e_g(x)$ de l'élasticité de g, pour tout réel strictement positif x.

3. La variable x, initialement égale à 2, augmente de 12 %. À l'aide d'un calcul approché, déterminer la variation relative de $g(x)$ liée à cette augmentation.

4. On suppose que x passe de 4 à 3,2. De quel pourcentage approximatif varie alors $g(x)$?

5. Quelles sont les valeurs du réel x pour lesquelles $e_g(x)$ vaut 1 ?

Exercice 3 [6,5 points]

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par $f(x\,;y) = \ln\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$.

1.a. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté D. Tracer D.

1.b. L'ensemble D est-il une partie convexe de $\mathbb{R}^2$? Justifier.

1.c. *Sans justifier*, dire si D est ouvert, fermé, compact.

2.a. Expliquer pourquoi f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

2.b. Calculer les expressions des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en les simplifiant au maximum.

3. Déterminer la courbe de niveau 0 de f.

Exercice 4 [4,5 points]

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $A = (5\,;3)$, $B = (-3\,;-1)$ et $C = (2\,;4)$.
Le but de l'exercice est de déterminer une équation du cercle passant par A, B et C.

1.a. Donner les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

1.b. Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par I et perpendiculaire à (AB).

2. Expliquer pourquoi la droite $\mathscr{D}'$ perpendiculaire à (BC) et passant par le milieu de $[BC]$ a pour équation $x + y - 1 = 0$.

3. Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent en un point Ω dont les coordonnées sont $(2\,;-1)$.

4. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon ΩA.

5. Vérifier que les points A, B et C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

6. Quel nom particulier donne-t-on au cercle passant par trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$?