Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 19 NOVEMBRE AU 25 NOVEMBRE

Exercice 1

On note f la fonction de deux variables réelles dont l'expression est :

$$f(x\,;y) = \frac{xy+1}{x^2-y}.$$

1. Préciser le domaine de définition de f, noté D.

2. Démontrer que D n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, puis calculer les dérivées partielles premières de f.

4. Calculer le gradient de f au point $(0\,;1)$.

Exercice 2

Donner l'ensemble de définition des trois fonctions suivantes. Dire pourquoi chacune est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, puis calculer ses dérivées partielles premières.

1. La fonction f définie par $f(x\,;y) = (x-y)(x-y^2)$.

2. La fonction g définie par $g(x\,;y) = \exp\left(\dfrac{3x-2y}{x^2+1}\right)$.

3. La fonction h définie par $h(x\,;y) = x^2\ln(x^2+y^2)$.

Exercice 3

On note φ la fonction de deux variables réelles définie par $\varphi(x\,;y) = \ln(1+2x+y)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de φ ?

2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

3. Quelle est la nature de la courbe de niveau 0 de φ ?

4. Calculer le gradient de φ en tout point de la courbe de niveau précédente.

Exercice 4

On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

1. Expliquer pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

2.a. Calculer l'expression $e_f(x)$ de l'élasticité de f, pour tout réel strictement positif x.

2.b. La variable x, initialement égale à 2, diminue de 5 %. À l'aide d'un calcul approché, déterminer la variation relative de $f(x)$ liée à cette diminution.

2.c. Si x vaut initialement 3 et que l'on souhaite que $f(x)$ augmente de 8 %, quelle doit être approximativement la variation de x ? On donnera la variation absolue et la variation relative.

Exercice 5

On note f la fonction de deux variables réelles définie par $f(x\,;y) = \ln(x^2+y^2+2x+2y+2)$. Le domaine de définition de la fonction f, inclus dans $\mathbb{R}^2$, sera noté $\mathcal{D}_f$.

1. Représenter $\mathcal{D}_f$, puis démontrer que $\mathcal{D}_f$ n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.

2. Répondre OUI ou NON, sans justifier : dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ est-il ouvert ? compact ?

3. Déterminer la courbe de niveau 0 de f ; en donner une représentation.

4. Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont vraies ? Justifier.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1\,;7) = 0.$ **(b)** $f(1\,;1) = 3\ln 2.$ **(c)** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2\,;0) = \dfrac{2}{5}.$

Problème

PARTIE 1 : ÉTUDE D'UN DOMAINE DU PLAN

Dans $\mathbb{R}^2$, on note $D = [0\,;21] \times [0\,;10]$; on pose également $A = (4\,;-1)$ et $B = (16\,;8)$.

1.1. Démontrer que D est à la fois un borné et un convexe de $\mathbb{R}^2$.

1.2. Sans justifier, répondre aux questions suivantes : D est-il ouvert ? fermé ? compact ?

1.3. Donner une équation de la droite Δ passant par les points A et B.
Montrer que le point $(8\,;2)$ appartient à cette droite.

1.4. Montrer que l'ensemble $D \setminus \Delta$ n'est pas une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

PARTIE 2 : APPLICATION ÉCONOMIQUE

Pour fabriquer un alliage, une usine utilise deux métaux X et Y en quantités respectives x et y, exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule $2x + 0{,}5y^2 + 4$. Pour tout couple $(x\,;y)$ appartenant à l'ouvert U égal à $]0\,;21[\times]0\,;10[$, on pose $C(x\,;y) = 2x + 0{,}5y^2 + 4$. On note $\mathcal{S}$ la surface représentative, dans un repère orthonormé de l'espace, de la fonction C ainsi définie.

Les métaux X et Y sont achetés respectivement 500 euros et 1 000 euros la tonne. Enfin, l'entreprise doit satisfaire la contrainte suivante, appelée *contrainte d'achat* : elle affecte 11 000 euros à l'achat des métaux.

2.1. Parmi les trois points $(13\,;9\,;60)$, $(12\,;4\,;40)$ et $(12\,;8\,;60)$, lequel appartient à $\mathcal{S}$?

2.2. La courbe de niveau $z = 20$ de C est-elle une parabole, une droite ou une hyperbole ?

2.3. Justifier que C est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Donner les expressions respectives des fonctions $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial C}{\partial y}$.

2.4. Expliquer pourquoi la contrainte d'achat se traduit par l'équation $x + 2y = 22$.

2.5. Déterminer le coût minimal de production des alliages, sous la contrainte d'achat.
Préciser les quantités correspondantes de métaux X et Y achetées.

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

CORRECTION

Exercice 1, exercice 2, exercice 3

La correction de ces exercices sera mise en ligne prochainement.

Exercice 4

1. La fonction f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur son ensemble de définition.}}$$

2.a. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, nous avons, par définition :

$$e_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x.$$

Après calculs, il vient :

$$\boxed{\forall x \in]0\,;+\infty[\ e_f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.}$$

2.b. En notant v la variation cherchée, nous pouvons écrire :

$$v \approx e_f(2) \times (-5\,\%).$$

Après calculs, nous obtenons :

$$v \approx 3\,\%.$$

$$\boxed{\text{Si } x \text{ diminue de } 5\,\% \text{ à partir de 2, alors } f(x) \text{ augmente de } 3\,\% \text{ environ.}}$$

2.c. Calculons tout d'abord la variation relative, notée V. Nous pouvons écrire :

$$+8\,\% \approx e_f(3) \times V,$$

et donc il vient :

$$V \approx -10\,\%.$$

$$\boxed{\text{Si } x = 3, \text{ alors pour que } f(x) \text{ augmente de } 8\,\%, \text{ il suffit que } x \text{ diminue de près de } 10\,\%.}$$

Il est aisé de calculer la variation relative de x : nous venons de dire que x doit diminuer de 10 % alors que $x = 3$. C'est donc que $\boxed{x \text{ doit diminuer de } 0{,}3.}$

Exercice 5

1. Nous avons successivement :

$$\mathcal{D}_f = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 > 0\}.$$

$$\mathcal{D}_f = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 + (y+1)^2 > 0\}.$$

Le carré d'un réel étant toujours positif, il est possible d'écrire :

$$\mathcal{D}_f = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 + (y+1)^2 \neq 0\}.$$

Une réécriture intéressante de $\mathcal{D}_f$ est :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 + (y+1)^2 = 0\}.$$

Or, pour tous réels X et Y, la proposition suivante est vraie :

$$X^2 + Y^2 = 0 \iff X = 0 \text{ et } Y = 0.$$

Il vient donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x = -1 \text{ et } y = -1\}.$$

En désignant par I le point $(-1\,;-1)$, nous pouvons donc affirmer :

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{I\}.}$$

Le point $A(-2\,;-2)$ est dans $\mathcal{D}_f$, tout comme le point $O(0\,;0)$. Si $\mathcal{D}_f$ était une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, le milieu du segment $[AO]$ serait dans $\mathcal{D}_f$, or ce n'est pas le cas : en effet, le milieu de $[AO]$ n'est autre que le point I, qui n'est pas dans $\mathcal{D}_f$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{D}_f \text{ n'est donc pas un convexe de } \mathbb{R}^2.}$$

2. L'ensemble $\boxed{\mathcal{D}_f \text{ est un ouvert non compact}}$ de $\mathbb{R}^2$.

3. En notant $\mathcal{C}_0$ la courbe de niveau 0 de f, nous avons successivement :

$$\mathcal{C}_0 = \{(x\,;y) \in \mathcal{D}_f, f(x\,;y) = 0\}.$$

$$\mathcal{C}_0 = \{(x\,;y) \in \mathcal{D}_f, x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 1\}.$$

$$\mathcal{C}_0 = \{(x\,;y) \in \mathcal{D}_f, (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1^2\}.$$

$$\boxed{\text{La courbe de niveau 0 de } f \text{ est donc le cercle de centre } I(-1\,;-1) \text{ et de rayon 1.}}$$

4. La fonction f admet des dérivées partielles premières définies sur $\mathcal{D}_f$; de manière plus précise, nous avons, pour tout $(x\,;y)$ de $\mathcal{D}_f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = \frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+2y+2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = \frac{2y+2}{x^2+y^2+2x+2y+2}.$$

Il vient donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1\,;7) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2\,;0) = \dfrac{2}{10}$.

$$\boxed{\text{L'égalité } \textbf{(a)} \text{ est donc vraie et l'égalité } \textbf{(c)} \text{ est fausse.}}$$

D'autre part, en reprenant l'expression de f, on obtient $f(1\,;1) = \ln 8$, or $\ln 8$ vaut $\ln(2^3)$, c'est-à-dire $3\ln 2$.

$$\boxed{\text{L'égalité } \textbf{(b)} \text{ est donc vraie.}}$$

Problème

1.1. Soit $(x\,;y)$ un élément de D. Nous avons alors :

$$0 \leqslant x \leqslant 21 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 10.$$

A fortiori, il vient :

$$|x| \leqslant 21 \text{ et } |y| \leqslant 10.$$

Nous venons de montrer :

$$\exists m_1 \in \mathbb{R}, \exists m_2 \in \mathbb{R}, \forall (x\,;y) \in D, \begin{cases} |x| \leqslant m_1 \\ |y| \leqslant m_2. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } D \text{ est donc une partie bornée de } \mathbb{R}^2.}$$

D'autre part, D est le produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } D \text{ est donc un convexe de } \mathbb{R}^2.}$$

1.2. $\boxed{D \text{ n'est pas un ouvert de } \mathbb{R}^2\text{, mais c'est un fermé de } \mathbb{R}^2 \text{ et un compact de } \mathbb{R}^2.}$

1.3. Pour tout M de $\mathbb{R}^2$, en posant $M = (x\,;y)$, on a $\overrightarrow{AB} = (12\,;9)$ et $\overrightarrow{AM} = (x-4\,;y+1)$. Ainsi, comme $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), nous pouvons écrire successivement :

$$(AB) = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} x-4 & 12 \\ y+1 & 9 \end{vmatrix} = 0\right\}.$$

$$(AB) = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, 9(x-4) - 12(y+1) = 0\}.$$

Après calculs, on conclut :

$$\boxed{\text{une équation de } (AB) \text{ est } 3x - 4y - 16 = 0.}$$

Le point $(8\,;2)$ appartient à (AB) si ses coordonnées vérifient l'équation de (AB), c'est-à-dire si $3 \times 8 - 4 \times 2 - 16 = 0$, ce qui est vrai.

$$\boxed{\text{Le point } (8\,;2) \text{ est donc sur } (AB).}$$

1.4. Les points $(8\,;3)$ et $(8\,;1)$ sont dans $D \setminus \Delta$ puisque 8 est dans $[0\,;21]$, que 3 et 1 sont dans $[0\,;10]$ et que $3 \times 8 - 4 \times 3 - 16 \neq 0$ et $3 \times 8 - 4 \times 1 - 16 \neq 0$.

Si $D \setminus \Delta$ était un convexe de $\mathbb{R}^2$, le milieu du segment joignant les deux points précédents devrait appartenir à $D \setminus \Delta$, or cela est faux. En effet, ce milieu est $(8\,;2)$, qui appartient à Δ d'après la question **1.3.**

Conclusion :

$$\boxed{D \setminus \Delta \text{ n'est pas un convexe de } \mathbb{R}^2.}$$

2.1. Par définition, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{S} = \{(x\,;y\,;z) \in U \times \mathbb{R}, z = 2x + 0{,}5y^2 + 4\}.$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{cases} 2\times 13 + 0{,}5\times 9^2 + 4 = 70{,}5 \neq 60 \\ 2\times 12 + 0{,}5\times 4^2 + 4 = 36 \neq 40 \\ 2\times 12 + 0{,}5\times 8^2 + 4 = 60. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, c'est le point } (12\,;8\,;60) \text{ qui est dans } \mathcal{S}.}$$

2.2. La courbe de niveau 20 de la fonction C, notée $\mathcal{C}_{20}$, est :

$$\mathcal{C}_{20} = \{(x\,;y) \in U, 2x + 0{,}5y^2 + 4 = 20\}.$$

$$\mathcal{C}_{20} = \{(x\,;y) \in U, x = -0{,}25y^2 + 8\}.$$

On reconnaît l'équation d'une parabole, de la forme $x = ay^2 + by + c$.

$$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_{20} \text{ est donc une parabole.}}$$

2.3. La fonction C est polynomiale : elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et donc en particulier sur U. De plus, pour tout $(x\,;y)$ de U, nous avons :

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial x}(x\,;y) = 2 \text{ et } \frac{\partial C}{\partial y}(x\,;y) = y.}$$

2.4. La contrainte d'achat est d'affecter 11 000 € à l'achat des métaux, sachant que le métal X est à 500 € la tonne et que le métal Y est à 1 000 € la tonne. La contrainte s'écrit donc :

$$500x + 1\,000y = 11\,000.$$

Après simplification, on obtient bien :

$$\boxed{x + 2y = 22.}$$

2.4. Le coût minimal de production des alliages est donné par le minimum de la fonction C sous la contrainte d'achat. Le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\boxed{\text{trouver les couples } (x\,;y) \text{ de } U \text{ vérifiant } \begin{cases} C(x\,;y) \text{ est minimal} \\ x + 2y = 22. \end{cases}}$$

Le problème est équivalent à celui de la détermination du minimum de la fonction φ définie pour tout y de $]0\,;10[$ par $\varphi(y) = 2(22 - 2y) + 0{,}5y^2 + 4$.

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition et l'on a, pour tout y de $]0\,;10[$:

$$\begin{cases} \varphi(y) = 0{,}5y^2 - 4y + 48 \\ \\ \varphi'(y) = y - 4 \\ \\ \varphi''(y) = 1. \end{cases}$$

Il est donc possible d'en déduire que φ est convexe sur $]0\,;10[$ et qu'elle possède un unique extremum. Il s'agit d'un minimum global, atteint en 4, égal à 40.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Le coût minimal de production des alliages sous la contrainte d'achat est donc de } 40\,000 \text{ € ;} \\ \text{l'usine achète alors 14 tonnes de métal } X \text{ et 4 tonnes de métal } Y.\end{array}}$$