Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 12 NOVEMBRE AU 18 NOVEMBRE

Exercice 1

On note f la fonction de deux variables réelles vérifiant :

$$f(x\,;y) = \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}.$$

1. Préciser le domaine de définition de f, noté D. En donner une représentation graphique.

2. Démontrer que D est un convexe de $\mathbb{R}^2$ mais que ce n'est pas un borné de $\mathbb{R}^2$.

3. Sans justifier, dire si D est ouvert et si D est fermé.

Exercice 2

Soit φ la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $\varphi(x) = x \ln x$.

1. Montrer que φ est une fonction convexe.

2. Étudier la convexité de l'ensemble $\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y \geqslant x \ln x\}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x\,;y) = x^2y - x^2 - 4y + 4.$$

On définit également g par l'expression :

$$g(x\,;y) = \sqrt{f(x\,;y)}.$$

1. Montrer qu'il est possible de factoriser $f(x\,;y)$ par $y-1$ pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

2. Déduire de la question précédente l'ensemble de définition de la fonction g. En donner une représentation graphique.

3. Démontrer que la fonction g est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 4

On note h la fonction de deux variables réelles définie par :

$$h(x\,;y) = 3x^2 \ln y + 1.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de h et démontrer qu'il n'est pas borné.

2. Dire pourquoi h est continue sur son ensemble de définition.

3. Montrer que la courbe de niveau 1 de h est la réunion d'une droite et d'une demi-droite. Donner un vecteur directeur de chacune d'elles.

Exercice 5

On note f la fonction de deux variables réelles dont l'expression algébrique est :

$$f(x\,;y) = \ln\left(x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4\right).$$

1.a. Quel est le domaine de définition de f ? Le dessiner.
1.b. Dans $\mathbb{R}^2$, le domaine de définition de f est-il borné ? convexe ? compact ? ouvert ? fermé ? *Aucune justification n'est attendue.*

2. Montrer que $f(2\,;1)$ vaut la moitié de $f(-1\,;0)$.

3. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.

4. Préciser la nature de la courbe de niveau 0 de f.

Exercice 6

Pour chaque affirmation, indiquer *sans justifier* si elle est VRAIE ou FAUSSE.

affirmation	réponse
L'ensemble $\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leqslant x^2\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.	
L'ensemble $\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3, -3x + 2y - 1 = 0\}$ est une droite.	
L'ensemble de définition de la fonction f dont l'expression est $f(x\,;y) = \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 9}$ est le cercle de centre $(0\,;0)$ et de rayon 3.	
Si A et B sont deux parties bornées de $\mathbb{R}^2$, alors l'intersection $A \cap B$ est nécessairement une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.	
L'ensemble $\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 6z - 8\}$ est une sphère de rayon 1.	

Exercice 7

Soit f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;y) = y - xy^2$.

1. Dire brièvement pourquoi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Préciser les images respectives des couples $(1\,;1)$, $(2\,;-1)$ et $(0\,;2)$.

3.a. Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe de niveau 0 de f.
3.b. Démontrer que cette courbe de niveau n'est pas une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.