

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 18 NOVEMBRE AU 24 NOVEMBRE

**Exercice 1**

On note  $f$  la fonction de deux variables réelles vérifiant :

$$f(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x + y - 1}}.$$

1. Préciser le domaine de définition de  $f$ , noté  $D$ . En donner une représentation graphique.
2. Démontrer que  $D$  est un convexe de  $\mathbb{R}^2$  mais que ce n'est pas un borné de  $\mathbb{R}^2$ .
3. Sans justifier, dire si  $D$  est ouvert et si  $D$  est fermé.

**Exercice 2**

Soit  $\varphi$  la fonction définie pour tout réel  $x$  strictement positif par  $\varphi(x) = x \ln x$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est une fonction convexe.
2. Étudier la convexité de l'ensemble  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y \geq x \ln x\}$ .

**Exercice 3**

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $(x; y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x; y) = x^2y - x^2 - 4y + 4.$$

On définit également  $g$  par l'expression :

$$g(x; y) = \sqrt{f(x; y)}.$$

1. Montrer qu'il est possible de factoriser  $f(x; y)$  par  $y - 1$  pour tout  $(x; y)$  de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Dédire de la question précédente l'ensemble de définition de la fonction  $g$ . En donner une représentation graphique.
3. Démontrer que la fonction  $g$  est continue sur son ensemble de définition.

**Exercice 4**

On note  $h$  la fonction de deux variables réelles définie par :

$$h(x; y) = 3x^2 \ln y + 1.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de  $h$  et démontrer qu'il n'est pas borné.
2. Dire pourquoi  $h$  est continue sur son ensemble de définition.
3. Montrer que la courbe de niveau 1 de  $h$  est la réunion d'une droite et d'une demi-droite. Donner un vecteur directeur de chacune d'elles.

### Exercice 5

On note  $f$  la fonction de deux variables réelles dont l'expression algébrique est :

$$f(x; y) = \ln(x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4).$$

- 1.a. Quel est le domaine de définition de  $f$ ? Le dessiner.
- 1.b. Dans  $\mathbb{R}^2$ , le domaine de définition de  $f$  est-il borné? convexe? compact? ouvert? fermé? *Aucune justification n'est attendue.*
2. Montrer que  $f(2; 1)$  vaut la moitié de  $f(-1; 0)$ .
3. Démontrer que  $f$  est continue sur son domaine de définition.
4. Préciser la nature de la courbe de niveau 0 de  $f$ .

### Exercice 6

Pour chaque affirmation, indiquer *sans justifier* si elle est VRAIE ou FAUSSE.

affirmation	réponse
L'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ .	
L'ensemble $\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, -3x + 2y - 1 = 0\}$ est une droite.	
L'ensemble de définition de la fonction $f$ dont l'expression est $f(x; y) = \frac{3}{x^2 + y^2 - 9}$ est le cercle de centre $(0; 0)$ et de rayon 3.	
Si $A$ et $B$ sont deux parties bornées de $\mathbb{R}^2$ , alors l'intersection $A \cap B$ est nécessairement une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ .	
L'ensemble $\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 6z - 8\}$ est une sphère de rayon 1.	

### Exercice 7

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $(x; y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x; y) = y - xy^2$ .

1. Dire brièvement pourquoi  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Préciser les images respectives des couples  $(1; 1)$ ,  $(2; -1)$  et  $(0; 2)$ .
- 3.a. Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe de niveau 0 de  $f$ .
- 3.b. Démontrer que cette courbe de niveau n'est pas une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ .