Université Paris-Dauphine **Année** 2013-2014
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 4 NOVEMBRE AU 10 NOVEMBRE

Exercice 1

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples de réels $(x\,;y)$ vérifiant $4 - x^2 - y^2 \neq 0$.

1. Donner une représentation de $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

2. L'ensemble $\mathcal{C}$ est-il convexe ? Justifier.

3. Sans justification, caractériser la frontière de $\mathcal{C}$ puis l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (0\,;-3\,;1)$, $B = (-1\,;2\,;0)$ et $C = (1\,;1\,;-7)$.

1. Calculer la distance de A à C.

2.a. Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils orthogonaux ? Justifier.
2.b. Retrouver le résultat précédent à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore.

3. Donner une équation cartésienne du plan passant par les points A, B et C.

Exercice 3

On considère les ensembles $E = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, 5x^2 + y^2 = 4\}$ et $F = [-1\,;1] \times [-2\,;2]$.

1. Préciser deux points de E et montrer que le milieu du segment joignant ces deux points n'est pas dans E. Que peut-on en conclure quant au caractère convexe de E ?

2. Démontrer que E est inclus dans F. Que peut-on en conclure quant au caractère borné de E ?

Exercice 4

On pose $A = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, x + y \leqslant 1\}$.

1. Représenter A dans un repère orthonormé puis mettre en évidence la frontière de A. Aucune justification n'est attendue.

2. Démontrer que A est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

3. Démontrer que A est convexe.

Exercice 5

Représenter les deux ensembles suivants puis montrer qu'ils ne sont pas bornés.

$$A = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 \leqslant x + y \leqslant 1\right\}$$

$$B = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, (x+2)^2 + y^2 > 4 \text{ et } x - y \leqslant -1\right\}$$

Exercice 6

Représenter graphiquement chacun des ensembles suivants dans un repère orthonomé, puis remplir le tableau en indiquant OUI ou NON dans les cases correspondantes. Aucune justification n'est attendue.

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
$E_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ 4 - y^2 > 0\}$					
$E_2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ -x \leqslant y \leqslant 2\}$					
$E_3 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 4\}$					
$E_4 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - 4x = 0\}$					
$E_5 = [-1\,;2] \times [-1\,;1]$					
$E_6 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 2y + 3 = 0\}$					
$E_7 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0 \text{ et } x^2 = 3x - 2\}$					
$E_8 = \mathbb{R}^2$					
$E_9 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x \text{ ou } y = 0\}$					
$E_{10} = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ 6x + 8 + x^2 + y^2 > 0\}$					
$E_{11} = [1\,;+\infty[\, \times\,]0\,;+\infty[$					