**Université Paris-Dauphine** **Année** 2012-2013
**UFR DEGEAD** 1[er] **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 5 NOVEMBRE AU 11 NOVEMBRE

## Exercice 1

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples de réels $(x\,;y)$ vérifiant $4 - x^2 - y^2 \neq 0$.

**1.** Donner une représentation de $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

**2.** L'ensemble $\mathcal{C}$ est-il convexe ? Justifier.

**3.** Sans justification, caractériser la frontière de $\mathcal{C}$ puis l'intérieur de $\mathcal{C}$.

## Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (0\,;-3\,;1)$, $B = (-1\,;2\,;0)$ et $C = (1\,;1\,;-7)$.

**1.** Calculer la distance de $A$ à $C$.

**2.a.** Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils orthogonaux ? Justifier.
**2.b.** Retrouver le résultat précédent à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore.

**3.** Donner une équation cartésienne du plan passant par les points $A$, $B$ et $C$.

## Exercice 3

On considère les ensembles $E = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ 5x^2 + y^2 = 4\}$ et $F = [-1\,;1] \times [-2\,;2]$.

**1.** Préciser deux points de $E$ et montrer que le milieu du segment joignant ces deux points n'est pas dans $E$. Que peut-on en conclure quant au caractère convexe de $E$ ?

**2.** Démontrer que $E$ est inclus dans $F$. Que peut-on en conclure quant au caractère borné de $E$ ?

## Exercice 4

On pose $A = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$.

**1.** Représenter $A$ dans un repère orthonormé puis mettre en évidence la frontière de $A$. Aucune justification n'est attendue.

**2.** Démontrer que $A$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

**3.** Démontrer que $A$ est convexe.

## Exercice 5

Représenter les deux ensembles suivants puis montrer qu'ils ne sont pas bornés.

$$A = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x + y \leqslant 1\right\}$$

$$B = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+2)^2 + y^2 > 4 \text{ et } x - y \leqslant -1\right\}$$

## Exercice 6

Représenter graphiquement chacun des ensembles suivants dans un repère orthonomé, puis remplir le tableau en indiquant OUI ou NON dans les cases correspondantes. Aucune justification n'est attendue.

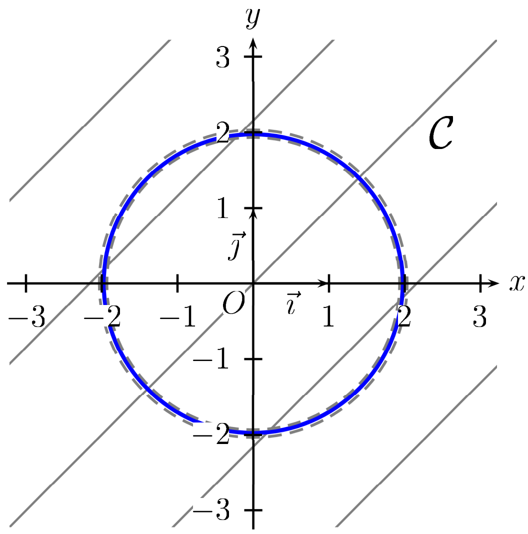
| ensemble | ouvert | fermé | borné | compact | convexe |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, 4 - y^2 > 0\}$ | | | | | |
| $E_2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, -x \leqslant y \leqslant 2\}$ | | | | | |
| $E_3 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 4\}$ | | | | | |
| $E_4 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 - 4x = 0\}$ | | | | | |
| $E_5 = [-1\,;2] \times [-1\,;1]$ | | | | | |
| $E_6 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, x - 2y + 3 = 0\}$ | | | | | |
| $E_7 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, y > 0 \text{ et } x^2 = 3x - 2\}$ | | | | | |
| $E_8 = \mathbb{R}^2$ | | | | | |
| $E_9 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, y = x \text{ ou } y = 0\}$ | | | | | |
| $E_{10} = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\, 6x + 8 + x^2 + y^2 > 0\}$ | | | | | |
| $E_{11} = [1\,;+\infty[ \times ]0\,;+\infty[$ | | | | | |

**Université Paris-Dauphine** **Année** 2012-2013
**UFR DEGEAD** 1^er **cycle**

CORRECTION

## Exercice 1

**1.** Quels que soient les réels $x$ et $y$, on remarque que les égalités $4-x^2-y^2=0$ et $x^2+y^2=2^2$ sont équivalentes. L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier privé du cercle de centre $(0\,;0)$ et de rayon 2. Une représentation de $\mathcal{C}$ est donnée ci-après.




**2.** Les points $(0\,;0)$ et $(4\,;0)$ sont deux éléments de $\mathcal{C}$ puisque $4-0^2-0^2 \neq 0$ et $4-4^2-0^2 \neq 0$. Ainsi, si l'ensemble $\mathcal{C}$ était convexe, alors le milieu du segment joignant ces deux points serait dans $\mathcal{C}$, or ce n'est pas le cas puisque ce milieu vaut $(2\,;0)$ et que $4-2^2-0^2=0$. Il est donc possible d'affirmer :

$$\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{C} \text{ n'est pas une partie convexe de } \mathbb{R}^2.}$$

**3.** De manière intuitive, nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\text{la frontière de } \mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } (0\,;0) \text{ et de rayon } 2.}$$

De même :

$$\boxed{\text{l'intérieur de } \mathcal{C} \text{ est } \mathcal{C} \text{ lui-même.}}$$

## Exercice 2

**1.** La distance $AC$ peut s'obtenir à l'aide de la formule :

$$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}.$$

Tous calculs effectués, nous obtenons :

$$\boxed{\text{la distance de } A \text{ à } C \text{ vaut } 9.}$$

**2.a.** Nous savons : $\overrightarrow{BA} = A - B$ et $\overrightarrow{BC} = C - B$.

Après calculs, nous pouvons donc affirmer :

$$\overrightarrow{BA} = (1\,;-5\,;1) \text{ et } \overrightarrow{BC} = (2\,;-1\,;-7).$$

En calculant le produit scalaire de $\overrightarrow{BA}$ par $\overrightarrow{BC}$, nous obtenons 0.

$$\boxed{\text{Les vecteurs } \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont donc orthogonaux.}}$$

**2.b.** En calculant les distances $BA$ et $BC$, nous obtenons :

$$BA = \sqrt{27} \text{ et } BC = \sqrt{54}.$$

En utilisant le résultat obtenu à la première question, nous remarquons :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2.$$

Il est donc possible d'invoquer la réciproque du théorème de Pythagore et d'affirmer que le triangle $ABC$ est rectangle en $B$. $\boxed{\text{On retrouve ainsi le résultat obtenu précédemment.}}$

**3.** Un vecteur $\vec{n}$ de $\mathbb{R}^3$ est normal au plan passant par $A$, $B$ et $C$ si, et seulement si, il est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire si, et seulement si, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0. \end{cases}$$

En posant $\vec{n} = (x\,;y\,;z)$ et en utilisant les questions précédentes, le système devient :

$$\begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ 2x - y - 7z = 0. \end{cases}$$

En isolant $x$ dans la première équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} x = 5y - z \\ 9y - 9z = 0, \end{cases}$$

et donc, de manière équivalente :

$$\begin{cases} x = 4y \\ y = z. \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, un vecteur normal au plan considéré est $(4\,;1\,;1)$. Une équation du plan est donc $4x + y + z + d = 0$, où le réel $d$ vérifie :

$$-3 + 1 + d = 0,$$

étant donné que le point $A$ appartient au plan.

$$\boxed{\text{Une équation répondant au problème est donc } 4x + y + z + 2 = 0.}$$

**Exercice 3**

**1.** Les couples $(0\,;2)$ et $(0\,;-2)$ sont dans $E$ car $5\times 0^2+2^2=4$ et $5\times 0^2+(-2)^2=4$. Le milieu du segment joignant ces points est le point $(0\,;0)$ ; il n'appartient pas à $E$ puisque $5\times 0^2+0^2\neq 4$.

Ces considérations prouvent que $\boxed{\text{l'ensemble } E \text{ n'est pas convexe}}$. En effet, si $E$ était convexe, alors le segment reliant deux points quelconques de $E$ serait inclus dans $E$, or nous venons d'exhiber deux points de $E$ dont le milieu n'est pas dans $E$.

**2.** Soit $(x\,;y)$ dans $E$. Il suffit de montrer :

$$\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 1 \\ -2\leqslant y\leqslant 2. \end{cases}$$

Comme $(x\,;y)$ est dans $E$, on peut affirmer :

$$5x^2=4-y^2.$$

Étant donné que $y^2$ est positif pour tout réel $y$, il est donc possible d'écrire :

$$5x^2\leqslant 4,$$

puis :

$$x^2\leqslant \frac{4}{5}.$$

À plus forte raison, il est donc clair que l'inégalité suivante est vraie :

$$x^2\leqslant 1.$$

De même, nous avons :

$$y^2=4-5x^2,$$

et donc :

$$y^2\leqslant 4.$$

Ces deux résultats partiels sur $x$ et sur $y$ amènent à la conclusion souhaitée.

Les calculs précédents démontrent que $\boxed{E \text{ est une partie bornée de } \mathbb{R}^2.}$

**Exercice 4**

**La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.**

**Exercice 5**

**La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.**

**Exercice 6**

**La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.**