Université Paris-Dauphine **Année** 2013-2014
UFR DEGEAD 1^er^ **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 28 OCTOBRE AU 3 NOVEMBRE

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (-1\,;2\,;1)$ et $B = (3\,;2\,;-2)$.

1. Donner deux vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$.

2. Donner une équation de la sphère de diamètre $[AB]$.

Exercice 2

Pour tout réel x, on pose $g(x) = e^{x-x^2}$.
On note C_g la représentation graphique de la fonction g dans le plan usuel, identifié à $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Donner le développement limité de g en 0 à l'ordre 2. En déduire une équation de la tangente à C_g au point $(0\,;1)$ ainsi que la position de C_g par rapport à cette tangente, au voisinage de ce point.

3. Établir que g'' s'annule en deux réels x_1 et x_2 dont on précisera les valeurs.

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

2. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

3. Étudier l'existence de $f''(0)$.

Exercice 4

On se place dans $\mathbb{R}^2$. Donner une équation cartésienne du cercle de centre $(1\,;0)$ passant par le point $(4\,;4)$.

Exercice 5

Étudier les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(3x+1)}{2x}\right) \qquad \lim_{x\to 4}\left(\frac{x-4}{2-\sqrt{x}}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x}-x\right)$$

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $A = (1\,;2)$ et $B = (3\,;1)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

2. Écrire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

3. Expliquer pourquoi les résultats des deux questions précédentes sont identiques.

Exercice 7

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Vérifier que $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 - 2x = 4$ sont les équations respectives de deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, dont on précisera le centre et le rayon.

2. Déterminer les points d'intersection éventuels des deux cercles.

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (3\,;-2)$ et $\vec{v} = (-1\,;0)$ ainsi que le point $A = (4\,;-1)$.

1. Calculer $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

2. Donner une équation cartésienne de la droite D_1 passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

3. Donner une équation cartésienne de la droite D_2 passant par A et de vecteur normal $\vec{v}$.

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $C = (3\,;-3\,;-2)$ et $D = (1\,;1\,;0)$.

1. On note I le milieu du segment $[CD]$; quelles sont les coordonnées de I ?

2. Donner une équation cartésienne du plan passant par I et admettant le vecteur $\overrightarrow{CD}$ comme vecteur normal.

3. Montrer que le plan déterminé à la question précédente est aussi l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $CM = DM$.

Exercice 10

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit (P) le plan d'équation $-2x - y + 2z + 1 = 0$. Soit (Q) le plan passant par les points $(1\,;0\,;2)$, $(3\,;0\,;0)$ et $(4\,;1\,;-1)$.

1. Donner un vecteur normal à (P), puis un vecteur normal à (Q).

2. Montrer que les vecteurs trouvés à la question précédente sont orthogonaux.

Exercice 11

On se place dans $\mathbb{R}^2$. Les trois équations ci-dessous représentent des équations de cercle ; pour chaque cercle dont il est question, préciser son rayon et les coordonnées de son centre.

$$3 - x^2 - 2x - y^2 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0 \qquad x^2 + y^2 = y$$