

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 21 OCTOBRE AU 27 OCTOBRE

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout x de $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x} + x \ln x$.

1. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
2. En utilisant l'approximation affine de f en 1, montrer l'égalité approchée : $f(0,9) \approx 2,1$.
3. Donner l'expression de l'élasticité de f sur $]0; +\infty[$. En déduire un pourcentage approché de l'évolution que subit $f(x)$ lorsque x augmente de 16 % à partir de 1.
4. Établir que f admet un unique extremum sur $]0; +\infty[$, que l'on ne cherchera pas à calculer. Montrer que cet extremum est un minimum global.

Exercice 2

Indiquer, *sans justifier*, si les affirmations sont VRAIES ou FAUSSES.

affirmation	réponse
Dans $\mathbb{R}^3$, la distance entre les points $(-2; -1; 0)$ et $(1; -1; 4)$ vaut $\sqrt{29}$.	
La fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+3}{1+x^2}$ admet un maximum.	
Le produit scalaire des vecteurs $(0; 2)$ et $(2; 1)$ vaut -4 .	
Dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur directeur à la droite d'équation $y = 1 - x$ est $(-1; 1)$.	
L'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6 = 0\}$ est un cercle de rayon 1.	
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\ \vec{u}\ = 3$ et $\ \vec{v}\ = 5$, alors il est possible que le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ soit égal à 20.	
En utilisant l'approximation affine de la fonction logarithme népérien en 1, on obtient l'égalité approchée : $\ln(0,92) \approx -0,04$.	
Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(3; -3)$ est orthogonal à la droite d'équation $y + x = 0$.	

Exercice 3

Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose $g(x) = x^2 e^{x^2 - 5x}$. La fonction g ainsi définie modélise le bénéfice d'une entreprise donnée : quand cette entreprise vend x centaines d'objets, son bénéfice vaut $g(x)$ milliers d'euros.

1. Démontrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et qu'elle est à valeurs dans $]0; +\infty[$.
2. Établir que l'élasticité de g s'annule en 0,5 et en 2.
3. Calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 500 objets, puis estimer son bénéfice lorsqu'elle en vend 501.
4. Vérifier que si l'entreprise diminue ses ventes de 8 % à partir de 25 objets, alors son bénéfice diminue de près de 7 %.
5. L'entreprise vend actuellement 300 objets et souhaite que son bénéfice augmente de 5 %. Combien d'objets doit-elle vendre pour atteindre cet objectif?
6. On suppose que l'entreprise vend 100 objets. Montrer que si elle augmente ses ventes d'un pourcentage t assez proche de 0, alors son bénéfice diminue environ de ce même pourcentage t .

Exercice 4

Étudier les limites suivantes, en indiquant éventuellement s'il s'agit de limites à droite ou de limites à gauche. On justifiera avec soin.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - 2e^x}{x - 1} \right) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x - 1}{3x^2 - 4x + 1} \right) \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x - e^x)$$

Exercice 5

Pour tout réel x de $] -1; +\infty[$, on pose $h(x) = \sqrt{1+x} - \ln(1+x)$.

On note C_h la représentation graphique de la fonction h dans le plan usuel, identifié à $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1; +\infty[$.
2. Donner le développement limité de h en 0 à l'ordre 2. En déduire une équation de la tangente à C_h au point $(0; 1)$ ainsi que la position de C_h par rapport à cette tangente, au voisinage de ce point.
3. Démontrer que h admet un unique extremum ; est-ce un minimum ou un maximum ? Donner la valeur de cet extremum et préciser le réel en lequel il est atteint, puis indiquer s'il s'agit d'un extremum local ou global.

Exercice 6

On note f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$.

1. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f puis montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble I à préciser.
3. Donner l'expression de la réciproque de f sur I , notée f^{-1} .

CORRECTION

Exercice 1

1. Les fonctions $x \mapsto \frac{2}{x}$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$, or f est obtenue à partir d'une somme et d'un produit de ces fonctions.

La fonction f est donc dérivable sur $]0; +\infty[$.

2. Pour tout x de $]0; +\infty[$, nous obtenons :

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + \ln x + 1.$$

Comme f est dérivable en 1, il est possible d'écrire, pour x suffisamment proche de 1 :

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Nous avons donc, après calculs, pour tout réel x voisin de 1 :

$$f(x) \approx -x + 3.$$

En particulier, si x prend la valeur 0,9 :

$$f(0,9) \approx 2,1.$$

3. La fonction f est à valeurs strictement positives, donc l'élasticité e_f de la fonction f est définie pour tout réel x de $]0; +\infty[$. Son expression est :

$$e_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x.$$

D'après la question précédente et à l'aide de quelques calculs, nous obtenons :

$$e_f(x) = \frac{x^2 \ln x + x^2 - 2}{x^2 \ln x + 2}.$$

D'autre part, pour tout a de $]0; +\infty[$ ainsi que pour tout réel h suffisamment proche de a vérifiant $a + h \in]0; +\infty[$, nous avons l'égalité approchée :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{f(a)} \approx e_f(a) \times \frac{a+h-a}{a}.$$

Le pourcentage p demandé est donc tel que :

$$p \approx e_f(1) \times 16 \, \%.$$

Autrement dit, nous avons :

$$p \approx -8 \, \%.$$

Lorsque x augmente de 16 % à partir de 1, $f(x)$ diminue de 8 % environ.

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et nous avons, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + \ln x + 1 \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x}.$$

Il apparaît ainsi que f'' est une fonction strictement positive : la fonction f' est donc strictement croissante. De plus, par opérations usuelles sur les limites, nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

La fonction f' réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc affirmer que la dérivée de f s'annule une fois et une seule sur $]0; +\infty[$. Autrement dit :

la fonction f admet un unique point critique.

D'autre part, comme la dérivée seconde de f est positive, nous pouvons affirmer :

la fonction f est convexe.

La conclusion attendue s'obtient à l'aide de ces deux résultats partiels.

Exercice 2

Le tableau rempli est le suivant.

affirmation	réponse
Dans $\mathbb{R}^3$, la distance entre les points $(-2; -1; 0)$ et $(1; -1; 4)$ vaut $\sqrt{29}$.	FAUX
La fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+3}{1+x^2}$ admet un maximum.	VRAI
Le produit scalaire des vecteurs $(0; 2)$ et $(2; 1)$ vaut -4 .	FAUX
Dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur directeur à la droite d'équation $y = 1 - x$ est $(-1; 1)$.	VRAI
L'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6 = 0\}$ est un cercle de rayon 1.	FAUX
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\ \vec{u}\ = 3$ et $\ \vec{v}\ = 5$, alors il est possible que le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ soit égal à 20.	FAUX
En utilisant l'approximation affine de la fonction logarithme népérien en 1, on obtient l'égalité approchée : $\ln(0,92) \approx -0,04$.	FAUX
Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(3; -3)$ est orthogonal à la droite d'équation $y + x = 0$.	FAUX

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto x^2 - 5x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme fonction polynomiale. D'autre part, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par composition, la fonction $x \mapsto e^{x^2-5x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Enfin, par produit avec la fonction $x \mapsto x^2$, dérivable sur $]0; +\infty[$:

la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$.

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives et $x^2 > 0$ pour x dans $]0; +\infty[$.

La fonction g est donc à valeurs dans $]0; +\infty[$.

2. Soit x dans $]0; +\infty[$. Par définition de l'élasticité, nous avons :

$$e_g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}x, \text{ avec } g'(x) = 2xe^{x^2-5x} + x^2(2x-5)e^{x^2-5x}.$$

Tous calculs effectués, et notamment après simplification par e^{x^2-5x} , il vient :

$$\forall x \in]0; +\infty[, e_g(x) = 2x^2 - 5x + 2.$$

De plus : $e_g(0,5) = 2 \times 0,25 - 5 \times 0,5 + 2 = 0$ et $e_g(2) = 2 \times 4 - 5 \times 2 + 2 = 0$.

L'élasticité de g s'annule donc en 0,5 et en 2.

3. Le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 500 objets s'obtient à partir du calcul de $g(5)$, car x s'exprime en centaines d'objets. Comme $g(5)$ est égal à 25, nous avons :

si l'entreprise vend 500 objets, elle réalise un bénéfice de 25 000 €.

Étant donné que 5,01 est proche de 5, il est possible d'utiliser l'approximation suivante :

$$g(5,01) \approx g(5) + g'(5) \times 0,01.$$

Dans la question précédente, nous avons établi que $g'(x) = x(2x^2 - 5x + 2)e^{x^2-5x}$ pour tout réel x strictement positif. Il vient donc $g'(5) = 135$. Par suite : $g(5,01) \approx 26,35$.

Si l'entreprise vend 501 objets, elle réalise un bénéfice d'environ 26 350 €.

4. Pour tout a de $]0; +\infty[$ et tout réel h voisin de 0 tels que $a + h$ est dans $]0; +\infty[$, nous savons qu'il est possible d'écrire :

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{g(a)} \approx e_g(a) \times \frac{a+h-a}{a}.$$

Il suffit donc de vérifier ici :

$$-7\% \approx e_g(0,25) \times (-8\%).$$

La question 2. assure :

$$e_g(0,25) = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{5}{4} + 2 = \frac{1}{8} - \frac{10}{8} + \frac{16}{8} = \frac{7}{8}.$$

L'affirmation annoncée est donc vérifiée.

5. L'approximation précédente peut être utilisée. Il s'agit de déterminer $a + h$ tel que :

$$+5\% \approx e_g(3) \times \frac{a + h - 3}{3}.$$

Comme $e_g(3)$ vaut 5, l'égalité approchée devient :

$$+1\% \approx \frac{a + h - 3}{3}.$$

Enfin, il vient :

$$a + h \approx 3,03.$$

Pour augmenter son bénéfice de 5%, l'entreprise doit passer de 300 objets vendus à 303.

6. Il s'agit de vérifier, pour tout réel p assez proche de 0 :

$$-p \approx e_g(1) \times (+p).$$

L'égalité approchée précédente est immédiate puisque $e_g(1)$ est égal à -1 .

L'affirmation annoncée est donc vérifiée.

Exercice 4

1. L'étude de la première limite ne pose pas de difficultés particulières : il s'agit uniquement d'opérations usuelles. Plus précisément, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1,$$

donc il vient clairement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2e^x) = -1.$$

Par ailleurs, on sait :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1.$$

Ainsi, par quotient, on peut affirmer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - 2e^x}{x - 1} \right) = 1.$$

2. À première vue, il y a une forme indéterminée. Remarquons toutefois que, quel que soit le réel x , nous avons l'égalité :

$$(3x - 1)(x - 1) = 3x^2 - 4x + 1.$$

De là, pour tout réel x différent de 1, il vient, après simplification :

$$\frac{x - 1}{3x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{3x - 1}.$$

Étant donné que nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2,$$

il vient, par inverse :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{3x^2-4x+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

3. La dernière limite fait également apparaître une forme indéterminée, mais on remarque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} - x - e^x = e^x \left(e^x - \frac{x}{e^x} - 1 \right).$$

Un résultat de croissances comparées assure par ailleurs :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0,$$

de sorte que l'on puisse affirmer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{x}{e^x} - 1 \right) = +\infty.$$

Par produit, étant donné la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$, nous obtenons finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x - e^x) = +\infty.$$

Exercice 5

1. La fonction $x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1; +\infty[$ comme fonction affine ; de plus, pour tout x de $] -1; +\infty[$, le réel $1+x$ est dans $]0; +\infty[$.

Les fonctions $X \mapsto \sqrt{X}$ et $X \mapsto \ln X$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$, il est possible d'affirmer, par composition, que les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1; +\infty[$.

Enfin, par différence :

$$\text{la fonction } h \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }] -1; +\infty[.$$

2. D'après la question précédente, h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition ; pour tout x de cet ensemble, nous avons :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{1+x} \text{ et } h''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} + \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Il est possible d'affirmer qu'il existe une fonction ε vérifiant, pour tout réel x de $] -1; +\infty[$:

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Tous calculs effectués, nous obtenons :

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Une équation de la tangente à C_h au point d'abscisse 0 se lit en tronquant le développement limité précédent à l'ordre 1.

Nous pouvons donc affirmer qu'une équation de la tangente recherchée est :

$$y = 1 - \frac{1}{2}x.$$

D'autre part, nous avons, pour tout x de $] -1; +\infty[$:

$$h(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Comme le carré d'un réel est positif, il est clair que, pour x suffisamment proche de 0 :

$$h(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \geq 0.$$

Ainsi, au voisinage du point $(0; 1)$, nous pouvons affirmer :

La courbe représentative de h est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

3. D'après la question précédente, pour tout x de $] -1; +\infty[$, nous avons :

$$h'(x) = 0 \iff \sqrt{1+x} - 2 = 0.$$

La proposition précédente peut se réécrire, pour tout x de $] -1; +\infty[$:

$$h'(x) = 0 \iff 1 + x = 4.$$

La fonction h admet donc un unique point critique : c'est 3. Comme $h''(3)$ vaut $\frac{1}{32}$, ce point critique est un point en lequel h admet un minimum local.

Ce minimum vaut $h(3)$, c'est-à-dire $2 - \ln 4$.

Une étude plus précise permet de montrer que le minimum est global.

En effet, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , nous avons l'équivalence :

$$h'(x) > 0 \iff x > 3.$$

Ainsi, h est strictement décroissante sur $] -1; 3[$ et strictement croissante sur $]3; +\infty[$.

La fonction h admet donc un unique extremum.
Il s'agit d'un minimum, global, atteint en 3 et valant $2 - \ln 4$.

Exercice 6

1. La fonction $x \mapsto 1 + |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$; de plus, elle ne s'annule pas sur cet ensemble. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, par quotient, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Afin de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que f est dérivable en 0.

Pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{1+|x|} - 0}{x - 0},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + |x|}.$$

Par opérations usuelles, il vient donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 1.$$

La fonction f est ainsi dérivable en 0 et l'on a $f'(0) = 1$.

2. Pour tout x de $] -\infty ; 0[$, on a :

$$f(x) = \frac{x}{1-x},$$

donc il est possible de dériver f comme un quotient et d'affirmer :

$$\forall x \in] -\infty ; 0[, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Une étude similaire sur $]0 ; +\infty[$ permet de conclure :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Enfin, dans la question précédente, nous avons montré : $f'(0) = 1$.

En regroupant les cas, on peut affirmer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et il est donc possible d'affirmer que f est bijective. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ pour déterminer l'intervalle I demandé.

En utilisant le résultat sur la limite en $-\infty$ d'une fraction rationnelle, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{-x} \right) = -1.$$

On obtient de même :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1.$$

La fonction f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1 ; 1[$.

3. Soit y dans $] -1 ; 1[$. Il s'agit de trouver le réel x solution de l'équation :

$$y = f(x).$$

Soit x dans $] -\infty ; 0[$. On a les équivalences successives suivantes :

$$y = f(x) \iff y = \frac{x}{1-x}.$$

$$y = f(x) \iff y - xy = x.$$

$$y = f(x) \iff y = x(1+y).$$

$$y = f(x) \iff \frac{y}{1+y} = x.$$

Par ailleurs, on remarque :

$$\frac{y}{1+y} < 0 \iff -1 < y < 0.$$

De même, si x est dans $[0; +\infty[$, on obtient après calculs :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

De la même façon :

$$\frac{y}{1-y} \geqslant 0 \Longleftrightarrow 0 \leqslant y < 1.$$

On peut regrouper les deux cas précédents en un :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-1; 1[, y = f(x) \Longleftrightarrow x = \frac{y}{1-|y|}.$$

La fonction f^{-1} est définie pour tout y de $] -1; 1[$ par :

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$