Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 22 OCTOBRE AU 28 OCTOBRE

Exercice 1

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on pose $g(x) = x^2 e^{x^2-5x}$. La fonction g ainsi définie modélise le bénéfice d'une entreprise donnée : quand cette entreprise vend x centaines d'objets, son bénéfice vaut $g(x)$ milliers d'euros.

1. Démontrer que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et qu'elle est à valeurs dans $]0\,;+\infty[$.

2. Établir que l'élasticité de g s'annule en 0,5 et en 2.

3. Calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 500 objets, puis estimer son bénéfice lorsqu'elle en vend 501.

4. Vérifier que si l'entreprise diminue ses ventes de 8 % à partir de 25 objets, alors son bénéfice diminue de près de 7 %.

5. L'entreprise vend actuellement 300 objets et souhaite que son bénéfice augmente de 5 %. Combien d'objets doit-elle vendre pour atteindre cet objectif ?

6. On suppose que l'entreprise vend 100 objets. Montrer que si elle augmente ses ventes d'un pourcentage t assez proche de 0, alors son bénéfice diminue environ de ce même pourcentage t.

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} + x\ln x$.

1. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

2. En utilisant l'approximation affine de f en 1, montrer l'égalité approchée : $f(0{,}9) \approx 2{,}1$.

3. Donner l'expression de l'élasticité de f sur $]0\,;+\infty[$. En déduire un pourcentage approché de l'évolution que subit $f(x)$ lorsque x augmente de 16 % à partir de 1.

4. Établir que f admet un unique extremum sur $]0\,;+\infty[$, que l'on ne cherchera pas à calculer. Montrer que cet extremum est un minimum global.

Exercice 3

Pour tout réel x de $]-1\,;+\infty[$, on pose $h(x) = \sqrt{1+x} - \ln(1+x)$.
On note C_h la représentation graphique de la fonction h dans le plan usuel, identifié à $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1\,;+\infty[$.

2. Donner le développement limité de h en 0 à l'ordre 2. En déduire une équation de la tangente à C_h au point $(0\,;1)$ ainsi que la position de C_h par rapport à cette tangente, au voisinage de ce point.

3. Démontrer que h admet un unique extremum ; est-ce un minimum ou un maximum ? Donner la valeur de cet extremum et préciser le réel en lequel il est atteint, puis indiquer s'il s'agit d'un extremum local ou global.

Exercice 4

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On pose $A = (2\,;3\,;0)$ et $B = (-1\,;3\,;1)$.
On définit les vecteurs $\vec{u} = (-1\,;0\,;-1)$ et $\vec{v} = (2\,;-1\,;1)$.

1. Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

2. Donner une équation du plan $\mathcal{P}'$ passant par B et de vecteur normal $\vec{v}$.

3. Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$.

4. Calculer la distance AB.

Exercice 5

On note h la fonction définie pour tout x de $[1\,;6]$ par $h(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$.
Donner une valeur approchée des extremums de h. On utilisera : $\ln 2 \approx 0{,}7$ et $\ln 3 \approx 1{,}1$.

Exercice 6

Indiquer, *sans justifier*, si les affirmations sont VRAIES ou FAUSSES.

affirmation	réponse
Dans $\mathbb{R}^3$, la distance entre les points $(-2\,;-1\,;0)$ et $(1\,;-1\,;4)$ vaut $\sqrt{29}$.	
La fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{1+x^2}$ admet un maximum.	
Le produit scalaire des vecteurs $(0\,;2)$ et $(2\,;1)$ vaut -4.	
Dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur directeur à la droite d'équation $y = 1 - x$ est $(-1\,;1)$.	
L'ensemble $\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6 = 0\}$ est un cercle de rayon 1.	
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\lVert\vec{u}\rVert = 3$ et $\lVert\vec{v}\rVert = 5$, alors il est possible que le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ soit égal à 20.	
En utilisant l'approximation affine de la fonction logarithme népérien en 1, on obtient l'égalité approchée : $\ln(0{,}92) \approx -0{,}04$.	
Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(3\,;-3)$ est orthogonal à la droite d'équation $y + x = 0$.	

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1[er] **cycle**

CORRECTION

Exercice 1

La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.

Exercice 2

1. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{2}{x}$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$, or f est obtenue à partir d'une somme et d'un produit de ces fonctions.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable sur }]0\,;+\infty[.}$$

2. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, nous obtenons :

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + \ln x + 1.$$

Comme f est dérivable en 1, il est possible d'écrire, pour x suffisamment proche de 1 :

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1).$$

Nous avons donc, après calculs, pour tout réel x voisin de 1 :

$$\boxed{f(x) \approx -x + 3.}$$

En particulier, si x prend la valeur 0,9 :

$$\boxed{f(0{,}9) \approx 2{,}1.}$$

3. La fonction f est à valeurs strictement positives, donc l'élasticité e_f de la fonction f est définie pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$. Son expression est :

$$e_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x.$$

D'après la question précédente et à l'aide de quelques calculs, nous obtenons :

$$\boxed{e_f(x) = \frac{x^2\ln x + x^2 - 2}{x^2 \ln x + 2}.}$$

D'autre part, pour tout a de $]0\,;+\infty[$ ainsi que pour tout réel h suffisamment proche de a vérifiant $a+h \in]0\,;+\infty[$, nous avons l'égalité approchée :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{f(a)} \approx e_f(a) \times \frac{a+h-a}{a}.$$

Le pourcentage p demandé est donc tel que :

$$p \approx e_f(1) \times 16\,\%.$$

Autrement dit, nous avons :

$$p \approx -8\,\%.$$

$$\boxed{\text{Lorsque } x \text{ augmente de } 16\,\% \text{ à partir de } 1,\ f(x) \text{ diminue de } 8\,\% \text{ environ.}}$$

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et nous avons, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + \ln x + 1 \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x}.$$

Il apparaît ainsi que f'' est une fonction strictement positive : la fonction f' est donc strictement croissante. De plus, par opérations usuelles sur les limites, nous avons :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty.$$

La fonction f' réalise donc une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc affirmer que la dérivée de f s'annule une fois et une seule sur $]0\,;+\infty[$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un unique point critique.}}$$

D'autre part, comme la dérivée seconde de f est positive, nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est convexe.}}$$

La conclusion attendue s'obtient à l'aide de ces deux résultats partiels.

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto 1 + x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1\,;+\infty[$ comme fonction affine ; de plus, pour tout x de $]-1\,;+\infty[$, le réel $1 + x$ est dans $]0\,;+\infty[$.

Les fonctions $X \mapsto \sqrt{X}$ et $X \mapsto \ln X$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, il est possible d'affirmer, par composition, que les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1 + x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1\,;+\infty[$.

Enfin, par différence :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]-1\,;+\infty[.}$$

2. D'après la question précédente, h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition ; pour tout x de cet ensemble, nous avons :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad h''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} + \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Il est possible d'affirmer qu'il existe une fonction ε vérifiant, pour tout réel x de $]-1\,;+\infty[$:

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Tous calculs effectués, nous obtenons :

$$\boxed{h(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)} \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Une équation de la tangente à C_h au point d'abscisse 0 se lit en tronquant le développement limité précédent à l'ordre 1.

Nous pouvons donc affirmer qu'une équation de la tangente recherchée est :

$$\boxed{y = 1 - \frac{1}{2}x.}$$

D'autre part, nous avons, pour tout x de $]-1\,;+\infty[$:

$$h(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Comme le carré d'un réel est positif, il est clair que, pour x suffisamment proche de 0 :

$$h(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \geqslant 0.$$

Ainsi, au voisinage du point $(0\,;1)$, nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\text{La courbe représentative de } h \text{ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse } 0.}$$

3. D'après la question précédente, pour tout x de $]-1\,;+\infty[$, nous avons :

$$h'(x) = 0 \iff \sqrt{1+x} - 2 = 0.$$

La proposition précédente peut se réécrire, pour tout x de $]-1\,;+\infty[$:

$$h'(x) = 0 \iff 1 + x = 4.$$

La fonction h admet donc un unique point critique : c'est 3. Comme $h''(3)$ vaut $\dfrac{1}{32}$, ce point critique est un point en lequel h admet un minimum local.

Ce minimum vaut $h(3)$, c'est-à-dire $2 - \ln 4$.

Une étude plus précise permet de montrer que le minimum est global.
En effet, pour tout réel x strictement supérieur à -1, nous avons l'équivalence :

$$h'(x) > 0 \iff x > 3.$$

Ainsi, h est strictement décroissante sur $]-1\,;3[$ et strictement croissante sur $]3\,;+\infty[$.

La fonction h admet donc un unique extremum.
Il s'agit d'un minimum, global, atteint en 3 et valant $2 - \ln 4$.

Exercice 4

Les deux premières questions sont très similaires ; elles sont ici l'occasion de présenter deux méthodes de résolution différentes.

1. Une caractérisation possible de $\mathcal{P}$ est la suivante :

$$\mathcal{P} = \left\{M \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0\right\}.$$

On sait que si $M = (x\,;y\,;z)$, alors $\overrightarrow{AM} = (x-2\,;y-3\,;z)$. D'autre part, nous avons : $\vec{u} = (-1\,;0\,;-1)$. Il est donc possible d'écrire :

$$\mathcal{P} = \left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ (x-2\,;y-3\,;z)\cdot(-1\,;0\,;-1) = 0\right\}.$$

Après avoir calculé le produit scalaire et après quelques regroupements, il vient :

$$\mathcal{P} = \left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ -x - z + 2 = 0\right\}.$$

$$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{P} \text{ est donc } -x - z + 2 = 0.}$$

2. On sait que si $(a\,;b\,;c)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à un plan donné, alors ce plan a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où seul le réel d reste à déterminer.

Nous savons donc qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}'$ est donnée par $2x - y + z + d = 0$. Nous déterminons la valeur du réel d en utilisant le fait que B soit un point de $\mathcal{P}'$, et donc que les coordonnées de B vérifient l'équation de $\mathcal{P}'$. Nous obtenons alors l'équation :

$$2 \times (-1) - 3 + 1 + d = 0,$$

qui se résout et donne

$$d = 4.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{une équation de } \mathcal{P}' \text{ est } 2x - y + z + 4 = 0.}$$

3. La norme de $\vec{v}$, notée $\|\vec{v}\|$, se calcule de la façon suivante :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la norme de } \vec{v} \text{ est égale à } \sqrt{6}.}$$

4. De la même façon, on remarque que la distance AB n'est autre que la norme de $\overrightarrow{AB}$, or nous avons :

$$\overrightarrow{AB} = (-3\,;0\,;1).$$

Il vient donc :

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2},$$

puis :

$$\boxed{\text{la distance } AB \text{ vaut } \sqrt{10}.}$$

Exercice 5

La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.

Exercice 6

Le tableau rempli est le suivant.

affirmation	réponse
Dans $\mathbb{R}^3$, la distance entre les points $(-2\,;-1\,;0)$ et $(1\,;-1\,;4)$ vaut $\sqrt{29}$.	**FAUX**
La fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{1+x^2}$ admet un maximum.	**VRAI**
Le produit scalaire des vecteurs $(0\,;2)$ et $(2\,;1)$ vaut -4.	**FAUX**
Dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur directeur à la droite d'équation $y = 1 - x$ est $(-1\,;1)$.	**VRAI**
L'ensemble $\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6 = 0\}$ est un cercle de rayon 1.	**FAUX**
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\\|\vec{u}\\| = 3$ et $\\|\vec{v}\\| = 5$, alors il est possible que le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ soit égal à 20.	**FAUX**
En utilisant l'approximation affine de la fonction logarithme népérien en 1, on obtient l'égalité approchée : $\ln(0{,}92) \approx -0{,}04$.	**FAUX**
Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(3\,;-3)$ est orthogonal à la droite d'équation $y + x = 0$.	**FAUX**