UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 15 OCTOBRE AU 21 OCTOBRE

Exercice 1

1. Lorsque le prix d'un paquet de cigarettes augmente de 5 %, les ventes chutent de 2 %. Quelle est l'élasticité des ventes par rapport au prix ?

2. Lorsqu'un objet vaut 100 euros, la demande est de 1 000 unités. Ce même objet augmente de 2 euros ; la demande est alors de 900 unités. Quelle est l'élasticité de la demande de cet objet par rapport au prix ?

Exercice 2

Soit g la fonction de la variable réelle x définie par l'expression $g(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2} - 1\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de g.

2. Donner le développement limité de g en 4, à l'ordre 2.

3. À l'aide de la question précédente, donner une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 4. Préciser la position relative de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage du point considéré.

Exercice 3

Une grande marque de bijoux étudie l'influence du prix de vente d'une pièce de sa collection, considérée comme la plus belle bague sertie actuelle, la TOPAZE IV.

Des statistiques, menées par le pôle financier du groupe, ont permis de montrer que l'indice d'offre proposé par les fournisseurs peut être modélisé par la fonction f définie ci-dessous. La variable x représente le prix de la bague, exprimé en milliers d'euros, étant entendu qu'il est inconcevable que la TOPAZE IV soit vendue à 500 euros ou moins.

La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \exp\left(\frac{x}{1-2x}\right)$.

1. Expliquer pourquoi l'étude de f n'est valable que sur l'intervalle I égal à $]0{,}5\,;+\infty[$.

2. Préciser le sens de variation de f ; calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

3. Donner l'expression de l'élasticité de la fonction f.

4.a. La TOPAZE IV est actuellement en vente à 1 500 euros. Quel pourcentage d'augmentation approximatif faut-il appliquer à ce prix si l'on souhaite que l'offre augmente de 3 % ?

4.b. Au début de la crise économique, le prix de la TOPAZE IV est passé de 3 000 euros à 2 250 euros. Dans le même temps, de quel pourcentage l'offre a-t-elle chuté ?

4.c. Au plus fort de la crise, les variations relatives de l'offre et du prix étaient égales ; autrement dit, l'élasticité était unitaire. Quel était alors le prix de la TOPAZE IV ?

Exercice 4

1. Au marché de Rungis, si le prix du kilo de framboises passe de 12 € à 11 €, la demande passe de 1,5 tonnes à 2 tonnes. Quelle est l'élasticité de la demande par rapport au prix ?

2. Sur ce même marché, si le prix augmente de 1 %, quelle sera approximativement la variation relative correspondante de la demande ? De quel taux approximatif faut-il baisser les prix pour que la demande augmente de 10 % ?

Exercice 5

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 \exp(-x^2)$, censée modéliser une demande : lorsque le prix d'un certain produit est égal à x euros, alors la demande vaut $f(x)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

2. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, donner l'expression $e_f(x)$ de l'élasticité de f.
Étudier le signe de la fonction e_f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Le prix x du produit est fixé à 50 centimes.
De quel pourcentage approximatif doit varier x pour que la demande augmente de 3 % ?

Exercice 6

Pour tout x de $]-1\,;+\infty[$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{1}{4+x}$ et $\psi(x) = (3+x)^3$.

1. Donner les approximations affines locales en 0 des fonctions φ et ψ.

2. En déduire des valeurs décimales approchées de $\dfrac{1}{4{,}08}$ et $3{,}1^3$.

Exercice 7

La satisfaction d'un marché boursier est modélisée de la façon suivante : si les investisseurs achètent x actions, alors la satisfaction du marché est égale à $\exp(\sqrt{x})$, pour tout x de $[1\,;50]$. On note f la fonction définie pour tout x de $[1\,;50]$ par $f(x) = \exp(\sqrt{x})$. *Dans les questions* **3.** *à* **5.**, *les calculs demandés seront effectués de manière approchée.*

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive.

2. Donner l'expression de l'élasticité de f.

3. On suppose que 9 actions sont achetées. Le nombre d'actions achetées chute alors de 2 %. Quelle a été la variation de la satisfaction du marché dans le même laps de temps ?

4. On souhaite que la satisfaction augmente de 50 %, sachant que 16 actions sont achetées actuellement. Combien faut-il que les investisseurs achètent d'actions pour atteindre cette variation ? Quelle aura alors été la variation relative du nombre d'actions achetées ?

5. On sait qu'à une certaine période de la journée, la variation relative du nombre d'actions achetées était de -3 % alors que la variation relative de la satisfaction était de -1 %. Quel était le nombre d'actions achetées à ce moment-là ?

6. Les traders du marché en question touchent des dividendes dès que l'élasticité de la satisfaction est supérieure à 2,5. Combien d'actions doivent être achetées pour que les traders commencent à percevoir des dividendes ?

Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013

UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

CORRECTION

Exercice 1

Pour résoudre cet exercice, on utilise la définition de l'élasticité donnée en économie : l'élasticité d'une grandeur A par rapport à une grandeur B est le rapport de la variation relative de A par la variation relative de B.

1. L'élasticité $e_{V/P}$ des ventes par rapport au prix est :

$$e_{V/P} = \frac{-2\,\%}{+5\,\%},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{e_{V/P} = -0{,}4.}$$

2. De même, l'élasticité $e_{D/P}$ de la demande par rapport au prix est :

$$e_{D/P} = \frac{\frac{900-1000}{1000}}{\frac{102-100}{100}}.$$

Autrement dit :

$$e_{D/P} = \frac{-10\,\%}{+2\,\%},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{e_{D/P} = -5.}$$

Exercice 2

1. L'expression $1 - \ln\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ a un sens si, et seulement si, $\frac{x}{2} - 1 > 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x > 2$.

$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } g \text{ est donc }]2\,;+\infty[.}$

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition, par composition. Pour tout x de $]2\,;+\infty[$, nous avons, après calculs non détaillés :

$$g'(x) = \frac{1}{2-x} \text{ et } g''(x) = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

Pour tout x de $]2\,;+\infty[$, le développement limité demandé est :

$$g(x) = g(4) + g'(4)(x-4) + \frac{g''(4)}{2}(x-4)^2 + (x-4)^2\varepsilon(x-4) \text{ avec } \lim_{x\to 4}\varepsilon(x-4) = 0.$$

Tous calculs effectués, nous obtenons :

$$\boxed{g(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-4) + \frac{1}{8}(x-4)^2 + (x-4)^2\varepsilon(x-4)} \text{ avec } \lim_{x\to 4}\varepsilon(x-4) = 0.$$

3. Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 4 se lit en tronquant le développement limité précédent à l'ordre 1.

Il est donc possible d'affirmer qu'une équation de la tangente recherchée est :

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x-4).$$

Soit, après calculs :

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 3.}$$

D'autre part, nous avons :

$$g(x) - \left(1 - \frac{1}{2}(x-4)\right) = \frac{1}{8}(x-4)^2 + (x-4)^2\varepsilon(x-4) \text{ avec } \lim_{x\to 4}\varepsilon(x-4) = 0.$$

Le carré d'un réel étant positif, nous avons, dès que x est suffisamment proche de 4 :

$$g(x) - \left(1 - \frac{1}{2}(x-4)\right) \geqslant 0.$$

Ainsi, pour peu que x soit assez proche de 4, nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } g \text{ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 4.}}$$

Exercice 3

1. La fonction f modélise l'offre proposée pour la TOPAZE IV, or le prix de vente de cette bague ne peut être inférieur ou égal à 500 euros, soit 0,5 centaine d'euros. La variable x ne peut donc prendre que des valeurs strictement supérieures à 0,5.

2. La fonction f est dérivable sur I comme composée ; de plus, pour tout x de I, il vient :

$$f'(x) = \frac{\exp\left(\dfrac{x}{1-2x}\right)}{(1-2x)^2}.$$

Nous remarquons que f' est positive sur I ; par suite, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } I.}$ D'autre part, nous avons :

$$\lim_{x\to 0{,}5^+}(1-2x) = 0^-.$$

Nous pouvons donc affirmer :

$$\lim_{x\to 0{,}5^+}\left(\frac{x}{1-2x}\right) = -\infty.$$

Il vient donc, par composition avec la fonction exponentielle :

$$\boxed{\lim_{x\to 0{,}5^+} f(x) = 0.}$$

La propriété usuelle sur la limite en l'infini des fractions rationelles assure :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1-2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{-2x}\right) = \frac{-1}{2}.$$

De la même façon, par composition :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-0,5}.}$$

3. Pour tout x de I, l'élasticité e_f de f a pour expression :

$$e_f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}.$$

Après calculs, il vient :

$$\boxed{\forall x \in I,\ e_f(x) = \frac{x}{(1-2x)^2}.}$$

4.a. Le pourcentage p que nous nous proposons de déterminer vérifie l'égalité approchée :

$$3\,\% \approx e_f(1{,}5) \times p.$$

Il s'agit donc de déterminer p tel que :

$$3\,\% \approx \frac{1,5}{4} \times p.$$

Ainsi, p vérifie :

$$3\,\% \approx \frac{3}{8} \times p.$$

Conclusion :

$$\boxed{p \approx 8\,\%}.$$

En augmentant le prix de près de 8 % à partir de 1 500 euros, l'offre augmentera de 3 %.

4.b. Il s'agit d'estimer la quantité suivante, que nous noterons v :

$$\frac{f(2,25) - f(3)}{f(3)}.$$

Utilisons pour cela l'approximation :

$$v \approx e_f(3) \times \frac{2,25-3}{3}.$$

Il vient :

$$v \approx \frac{3}{25} \times (-0,25).$$

Il vient :

$$\boxed{v \approx -3\,\%}.$$

Lorsque le prix de la bague a chuté de 3 000 euros à 2 250 euros, l'offre a chuté de 3 %.

4.c. Nous devons déterminer les réels x de I qui vérifient :

$$e_f(x) = 1.$$

Nous avons l'équivalence :

$$e_f(x) = 1 \iff x = (1-2x)^2.$$

Ainsi, après calculs :

$$e_f(x) = 1 \iff 4x^2 - 5x + 1 = 0.$$

En remarquant que 1 est une solution évidente, il vient :

$$e_f(x) = 1 \iff (x-1)(4x-1) = 0.$$

Finalement :

$$e_f(x) = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = 0{,}25.$$

Comme 0,25 n'appartient pas à I, nous pouvons affirmer qu'il existe un unique prix x de I pour lequel l'élasticité est unitaire : il s'agit de $x = 1$.

$\boxed{\text{Au plus fort de la crise, le prix de la bague était donc de 1 000 euros.}}$

Exercice 4

Il s'agit de calculs similaires à ceux effectués dans l'exercice 1.

1. L'élasticité $e_{D/P}$ de la demande par rapport au prix est :

$$e_{D/P} = \frac{\frac{2-1{,}5}{1{,}5}}{\frac{11-12}{12}}.$$

Autrement dit :

$$e_{D/P} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-1}{12}},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{e_{D/P} = -4.}$$

2. De manière un peu imprécise, nous pouvons écrire :

$$\text{élasticité de la demande par rapport au prix} = \frac{\text{variation relative de la demande}}{\text{variation relative du prix}},$$

d'où :

$$-4 = \frac{\text{variation relative de la demande}}{+1\,\%}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{si le prix augmente de } 1\,\%\text{, la demande va diminuer de } 4\,\%.}$

De même, la même égalité assure :

$$\text{élasticité de la demande par rapport au prix} = \frac{\text{variation relative de la demande}}{\text{variation relative du prix}},$$

d'où :

$$-4 = \frac{+10\,\%}{\text{variation relative du prix}}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour que la demande augmente de } 10\,\%\text{, on doit baisser le prix de } 2{,}5\,\%.}$

Exercice 5

1. La fonction $x \mapsto -x^2$ étant polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$. Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la composée $x \mapsto \exp(-x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Par produit, nous pouvons affirmer : $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur son ensemble de définition.}}$

2. Quel que soit le réel x strictement positif, on a :

$$e_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x.$$

Après dérivation de f et quelques simplifications, nous obtenons :

$$\boxed{e_f(x) = 2(1 - x^2).}$$

L'étude du signe de l'élasticité de f est alors claire, puisque e_f est un trinôme dont les racines sont -1 et 1 :

x	0		1		$+\infty$
signe de $e_f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

3. On sait que l'élasticité est une bonne approximation du quotient de la variation relative de la demande par la variation relative du prix. On cherche le pourcentage p vérifiant :

$$+3\,\% \approx e_f(0{,}5) \times p.$$

Il vient :

$$+3\,\% \approx 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \times p,$$

puis finalement :

$$+3\,\% \times \approx \frac{6}{4} \times p.$$

$\boxed{\text{Pour que la demande augmente de } 3\,\%\text{, il suffit donc d'augmenter le prix d'environ } 2\,\%.}$

Exercice 6

De manière générale, si f est une fonction dérivable en 0, l'approximation affine locale de f en 0 est la fonction $\hat{f}$ définie pour tout réel x par :

$$\hat{f}(x) = f(0) + f'(0)x.$$

1. La fonction φ est une fraction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition.

En particulier, φ est dérivable en 0 et sa dérivée vérifie, quel que soit le réel x strictement supérieur à -1 :

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{(4+x)^2}.$$

L'approximation affine locale de φ en 0 est donc définie pour tout réel x par :

$$\boxed{\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{16}.}$$

De même, ψ est dérivable en tant que fonction polynomiale et l'on a :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[,\ \psi'(x) = 3(3+x)^2.$$

L'approximation affine locale de ψ en 0 est donc définie pour tout réel x par :

$$\boxed{\hat{\psi}(x) = 27 + 27x.}$$

2. Lorsque x est suffisamment proche de 0, une bonne approximation de $\varphi(x)$ est donnée par $\hat{\varphi}(x)$; il en est de même pour $\psi(x)$.

On peut ainsi écrire :

$$\varphi(0{,}08) \approx \frac{1}{4} - \frac{0{,}08}{16},$$

et donc :

$$\frac{1}{4{,}08} \approx 0{,}25 - 0{,}005.$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{4{,}08} \approx 0{,}245.}$$

De même, nous pouvons écrire :

$$\psi(3{,}1) \approx 27 + 27 \times 0{,}1.$$

Conclusion :

$$\boxed{3{,}1^3 \approx 29{,}7.}$$

Exercice 7

La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.