

Exercice 1

Soit $h: [1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -x^2 + 10x - 9 - \frac{8}{x}$$

Pour tout x de $[1; 6]$, on a

$$h'(x) = -2x + 10 - \frac{8}{x}$$

puisque h est dérivable sur $[1; 6]$.

Ainsi :

$$\forall x \in [1; 6], \quad h'(x) = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$$

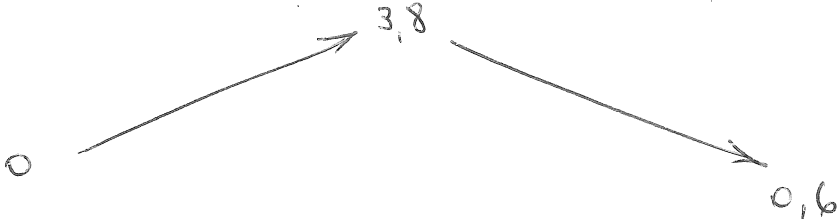
Le signe de $h'(x)$ est celui du trinomôme
 $-2x^2 + 10x - 8$, dont le discriminant Δ

vaut $10^2 - 4 \times (-8) \times (-2)$, soit 36. Les

racines de $-2x^2 + 10x - 8$ sont donc

$$\frac{-10 - 6}{-4} \text{ et } \frac{-10 + 6}{-4}, \text{ i.e. } 4 \text{ et } 1. \text{ On}$$

peut donc établir le tableau suivant.

n	1	4	6
type de $h'(n)$	$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array}$	$-$
variante de h			

Où a $h(1) = -1^2 + 10 \times 1 - 9 - 8 \ln 1$

donc $h(1) = 0$

$h(4) = -4^2 + 10 \times 4 - 9 - 8 \ln 4$

donc $h(4) = 15 - 16 \ln 2$

d'où $h(4) \approx 3,8$

$h(6) = -6^2 + 10 \times 6 - 9 - 8 \ln 6$

donc $h(6) = 15 - 8 \ln 2 - 8 \ln 3$

d'où $h(6) \approx 0,6$

Ainsi, h admet un minimum global,
 égal à 0, atteint pour $n = 1$,

ainsi qu'un maximum global, égal à 3,8 environ, atteint en $x = 4$; h admet aussi un minimum local, en 6, égal à 0,6.

Exercice 2

1.1. Montrons que D est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

Soit (x, y) dans D .

On a alors $0 \leq x \leq 21$ et $0 \leq y \leq 10$.

Ainsi : $|x| \leq 21$ et $|y| \leq 10$.

Conclusion : il existe deux réels m_1 et m_2 tels que pour tout (x, y) de D , on a $|x| \leq m_1$ et $|y| \leq m_2$. D est donc une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que D est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

D est l'intersection des quatre demi-plans d'équation respectives $0 \leq x$,