Exercice 1

Soit $h : [1;6] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x.$$

Pour tout x de $[1;6]$, on a

$$h'(x) = -2x + 10 - \frac{8}{x}$$

puisque h est dérivable sur $[1;6]$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [1;6], \quad h'(x) = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x}}$$

Le signe de $h'(x)$ est celui du trinôme $-2x^2+10x-8$, dont le discriminant Δ vaut $10^2 - 4 \times (-8) \times (-2)$, soit 36. Les racines de $-2x^2 + 10x - 8$ sont donc $\frac{-10-6}{-4}$ et $\frac{-10+6}{-4}$, i.e. 4 et 1. On peut donc établir le tableau suivant.

x	1		4		6
signe de $h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
variation de h	0	$\nearrow$	$3{,}8$	$\searrow$	$0{,}6$

On a $h(1) = -1^2 + 10 \times 1 - 9 - 8 \ln 1$

donc $\underline{h(1) = 0}$

$h(4) = -4^2 + 10 \times 4 - 9 - 8 \ln 4$

donc $h(4) = 15 - 16 \ln 2$

d'où $\underline{h(4) \simeq 3{,}8}$

$h(6) = -6^2 + 10 \times 6 - 9 - 8 \ln 6$

donc $h(6) = 15 - 8 \ln 2 - 8 \ln 3$

d'où $\underline{h(6) \simeq 0{,}6}$

Ainsi, h admet un minimum global,

égal à 0, atteint pour $x = 1$,

ainsi qu'un maximum global, égal à 3,8 environ, atteint en $x = 4$; h admet aussi un minimum local, en 6, égal à 0,6.

Exercice 2

1.1. Montrons que D est un borné de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x;y)$ dans D.

On a alors $0 \leq x \leq 21$ et $0 \leq y \leq 10$.

Ainsi : $|x| \leq 21$ et $|y| \leq 10$.

Conclusion : il existe deux réels m_1 et m_2 tels que pour tout $(x;y)$ de D, on a $|x| \leq m_1$ et $|y| \leq m_2$. D est donc une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que D est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

D est l'intersection des quatre demi-plans d'équations respectives $0 \leq x$,