

PREMIER DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU

Exercice 1 [5,5 points]

Soit g la fonction de la variable réelle x vérifiant $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$.

1. Donner l'ensemble de définition de g et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ensemble.
2. Calculer le développement limité de g en 2 à l'ordre 2.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2, puis préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe de g au voisinage de ce point.
4. Quelle approximation est la plus exacte : $g(1,9) \approx 0,104$ ou $g(1,9) \approx 0,998$? Justifier.

Exercice 2 [2 points]

Étudier précisément, sur $\mathbb{R}$, les points critiques et les extremums éventuels de la fonction u définie par $u(x) = x^2 + (2x + 2)e^{-x}$ pour tout réel x .

Exercice 3 [2,5 points]

Dans le plan usuel identifié à $\mathbb{R}^2$, on note $A = (-2; 3)$, $B = (0; 5)$.

- 1.a. Donner une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$.
- 1.b. Montrer que l'ensemble des couples $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$ est un cercle $\mathcal{C}_2$ dont on précisera le centre et le rayon.
2. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le centre de $\mathcal{C}_1$ et le centre de $\mathcal{C}_2$.

Exercice 4 [5,5 points]

Le propriétaire d'un quotidien marseillais étudie le nombre d'exemplaires vendus du journal qu'il possède. Le service des ventes effectue la modélisation suivante : pour tout p de $]0; 2[$, on pose $f(p) = 10\sqrt{2-p}$, où p désigne le prix unitaire du journal, en euros, et où $f(p)$ représente le nombre d'exemplaires vendus, en milliers. On admet que f est dérivable sur $]0; 2[$.

1. Calculer la dérivée de f puis l'élasticité de f .
2. Si le prix du journal est fixé à 1,75 €, combien d'exemplaires sont vendus ? Estimer le nombre d'exemplaires vendus si le prix passe à 1,80 €.
- 3.a. Chaque journal est actuellement vendu 1,50 €. Quel serait le pourcentage approximatif d'augmentation des ventes si le prix était diminué de 2 % ?
- 3.b. Durant l'été, le quotidien était à un prix tel qu'une diminution de 2 % du prix entraînait une augmentation des ventes proche de 1 %. Quel était le prix du journal durant l'été ? Combien d'exemplaires étaient alors vendus chaque jour ?

Exercice 5 [4,5 points]

Les réponses de cet exercice se feront sur l'ANNEXE, *sans justification*. Représenter avec précision les deux ensembles suivants et compléter les cases par OUI ou par NON.

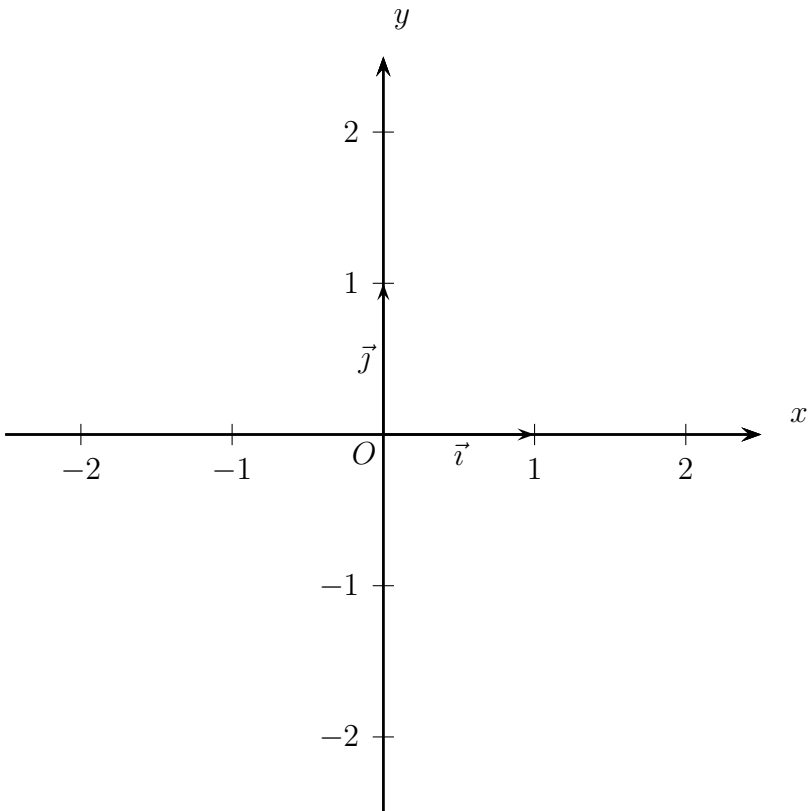
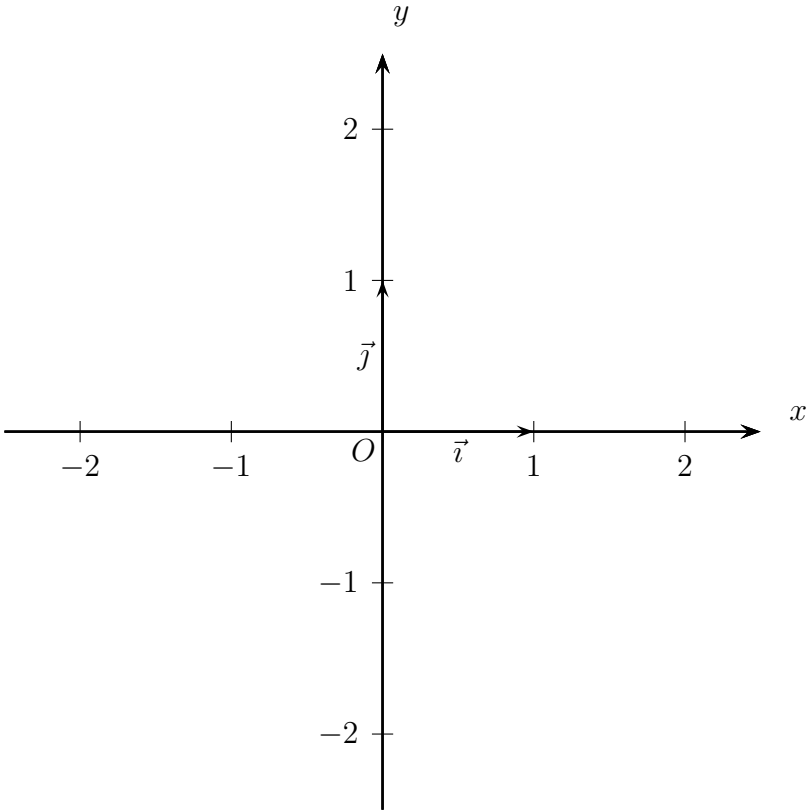
$$E_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq 0\} \quad E_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 1 + 2y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 + 2x \leq 0\}$$

Prénom NOM : _____

ANNEXE (à rendre avec la copie)

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
E_1					

ensemble	ouvert	fermé	borné	compact	convexe
E_2					



PREMIER DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU (CORRECTION)

Exercice 1

1. Le discriminant du trinôme $X^2 - 5X + 7$ est égal à -3 , donc la quantité $x^2 - 5x + 7$ est strictement positive quel que soit le réel x . Par suite, il est possible d'affirmer :

la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

Étant donné que la fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 7$ est polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est à valeurs dans $]0; +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme népérien est de classe $\mathcal{C}^2$. Par composition :

la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Comme la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité d'ordre 2 en 2. Il existe donc une fonction ε qui vérifie, pour tout réel x :

$$g(x) = g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{g''(2)}{2}(x-2)^2 + (x-2)^2\varepsilon(x-2), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 2} \varepsilon(x-2) = 0.$$

Après calculs non détaillés, nous obtenons, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+7} \text{ et } g''(x) = \frac{-2x^2+10x-11}{(x^2-5x+7)^2}.$$

En particulier, nous avons donc :

$$g'(2) = -1 \text{ et } g''(2) = 1.$$

Étant donné que $g(2)$ vaut 0, le développement limité demandé est :

$$g(x) = -(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + (x-2)^2\varepsilon(x-2), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 2} \varepsilon(x-2) = 0.$$

3. Pour obtenir l'équation demandée, il suffit de tronquer le développement limité précédent à l'ordre 1 en faisant abstraction de la fonction ε .

Une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2 est $y = -x + 2$.

Le développement limité précédent peut se réécrire : pour tout réel x , on a :

$$g(x) - (-x + 2) = (x-2)^2 \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x-2) \right), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 2} \varepsilon(x-2) = 0.$$

Étant donné que le carré d'un réel est positif, on peut affirmer, pour x proche de 2 :

$$(x-2)^2 \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x-2) \right) \geq 0.$$

Ainsi, si x est au voisinage de 2 :

$$g(x) - (-x + 2) \geq 0.$$

Au voisinage du point d'abscisse 2, la courbe de g est au-dessus de sa tangente.

4. Le développement limité de g en 2 à l'ordre 1 permet d'écrire, pour x proche de 2 :

$$g(x) \approx -x + 2.$$

Ainsi, dans le cas particulier où x vaut 1,9, on obtient :

$$g(1,9) \approx 0,1.$$

Des deux approximations proposées, celle qui semble la plus exacte est donc $g(1,9) \approx 0,998$. En réalité, en regardant plus précisément, on note que le développement limité de g en 2 à l'ordre 2 permet d'affirmer, pour x proche de 2 :

$$g(x) \approx -x + 2 + \frac{1}{2}(x - 2)^2.$$

En remplaçant x par 1,9, nous obtenons, après calculs :

$$g(1,9) \approx 0,105.$$

Comme un développement limité donne une approximation d'autant plus précise que son ordre est élevé, nous concluons :

c'est l'approximation $g(1,9) \approx 0,104$ qui est la plus précise.

Exercice 2

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme opérations usuelles à partir de fonctions elles-mêmes dérivables sur $\mathbb{R}$. Un réel a est un point critique de u si, et seulement si, l'égalité $u'(a) = 0$ est vraie. Quel que soit le réel x , nous avons :

$$u'(x) = 2x + 2e^{-x} + (2x + 2)(-e^{-x}).$$

Il est possible de factoriser l'expression précédente et d'affirmer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x(1 - e^{-x}).$$

Ainsi, a est un point critique de u si, et seulement si :

$$2a = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - e^{-a} = 0,$$

c'est-à-dire si, et seulement si :

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad 1 = e^{-a},$$

et donc finalement, après passage au logarithme népérien dans l'équation de droite :

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad 0 = -a.$$

La fonction u admet un unique point critique : il s'agit du réel 0.

Afin d'étudier la nature du point critique trouvé, nous pouvons calculer les dérivées successives de u . Nous avons, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$u''(x) = 2 - 2e^{-x} + 2xe^{-x} \quad \text{et} \quad u^{(3)}(x) = 4e^{-x} - 2xe^{-x}.$$

Nous remarquons ainsi que le plus petit entier naturel non nul p tel que $u^{(p)}(0) \neq 0$ est 3. Comme 3 est un nombre impair, nous pouvons affirmer :

la fonction u n'admet aucun extremum en 0.

Remarque : la fonction u n'admet donc pas d'extremum, bien qu'elle admette un point critique. Cela n'est pas aberrant : penser à la fonction $x \mapsto x^3$. On peut simplement dire qu'au point d'abscisse 0, la tangente à la courbe de u est horizontale.

Exercice 3

1.a. Le centre du cercle $\mathcal{C}_1$ est le milieu Ω_1 du segment $[AB]$. Nous avons :

$$\Omega_1 = \frac{A+B}{2},$$

c'est-à-dire, après calculs :

$$\Omega_1 = (-1; 4).$$

Le rayon du cercle $\mathcal{C}_1$ vaut donc $\Omega_1 A$, égal à $\sqrt{(x_A - x_{\Omega_1})^2 + (y_A - y_{\Omega_1})^2}$.

Il vient donc :

$$\Omega_1 A = \sqrt{2}.$$

Une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ est donc $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 2$.

1.b. Quels que soient les réels x et y , il y a équivalence entre les équations suivantes :

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+5)^2 - 25 + 20 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 3^2$$

Le cercle $\mathcal{C}_2$ a donc un rayon égal à 3 et admet pour centre le point Ω_2 égal à $(2; -5)$.

2.a. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point Ω_1 et admet le vecteur $\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$ comme vecteur directeur. Il est donc possible de caractériser la droite $\mathcal{D}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathbb{R}^2, \det(\overrightarrow{\Omega_1 M}; \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}) = 0 \right\}.$$

Après avoir calculé les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$, il vient donc :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \left| \begin{array}{cc} x+1 & 3 \\ y-4 & -9 \end{array} \right| = 0 \right\}.$$

Après calcul du déterminant et quelques simplifications, nous pouvons affirmer :

une équation de $\mathcal{D}$ est $-3x - y + 1 = 0$.

Exercice 4

1. La fonction f est dérivable et nous avons, pour tout p de $]0; 2[$:

$$f'(p) = 10 \frac{-1}{2\sqrt{2-p}}, \text{ c'est-à-dire } \boxed{f'(p) = \frac{-5}{\sqrt{2-p}}}.$$

Par définition, l'élasticité de f en p , pour tout p de $]0; 2[$, est telle que :

$$e_f(p) = \frac{f'(p)}{f(p)} p.$$

Nous obtenons, après quelques calculs :

$$e_f(p) = \frac{p}{2p-4}.$$

2. Par définition : $f(1,75) = 10\sqrt{0,25}$. Étant donné que le carré de 0,5 vaut 0,25, nous avons :

$$f(1,75) = 5.$$

Si le prix du journal est fixé à 1,75 €, il y a 5 000 journaux vendus.

Comme 1,75 et 1,80 sont assez proches, il est possible d'utiliser l'approximation suivante :

$$f(1,80) \approx f(1,75) + f'(1,75) \times 0,05.$$

Nous avons l'égalité $f(1,75) = 5$ et nous pouvons calculer :

$$f'(1,75) = \frac{-5}{\sqrt{0,25}} = \frac{-5}{0,5} = -10.$$

De là :

$$f(1,80) \approx 5 - 10 \times 0,05,$$

c'est-à-dire :

$$f(1,80) \approx 4,5.$$

Si le prix du journal est fixé à 1,80 €, il y a environ 4 500 journaux vendus.

3.a. On peut utiliser l'approximation suivante, en notant v le pourcentage demandé :

$$v \approx e_f(1,5) \times (-2) \text{ \%}.$$

D'après la question **1.**, nous pouvons calculer $e_f(1,5)$:

$$e_f(1,5) = \frac{1,5}{2 \times 1,5 - 4} = -1,5.$$

De là, nous pouvons conclure :

si le prix diminue de 2 % à partir de 1,50 €, les ventes augmentent de 3 % environ.

3.b. Notons p le prix cherché ; d'après l'énoncé, nous savons alors :

$$1 \text{ \%} \approx e_f(p) \times (-2 \text{ \%}).$$

Nous cherchons donc le réel p de $]0; 2[$ vérifiant :

$$e_f(p) = \frac{-1}{2},$$

c'est-à-dire tel que :

$$\frac{p}{2p - 4} = \frac{-1}{2}.$$

Après calculs, nous obtenons $p = 1$ et pouvons affirmer :

durant l'été, le journal était au prix de 1 €.

Comme l'égalité $f(1) = 10$ est vraie, nous avons :

durant l'été, 10 000 journaux quotidiens étaient vendus.

Exercice 5

Voir la correction effectuée en classe.