Université Paris-Dauphine **Année** 2013-2014
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 2 DÉCEMBRE AU 8 DÉCEMBRE

Exercice

Donner l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x\,;y) = y^2 - x^2 + \ln(x^2)$. Calculer une équation du plan tangent $\mathcal{P}$ à la surface représentative de g au point $(1\,;2\,;3)$, puis étudier la position de $\mathcal{P}$ par rapport à la surface de g au voisinage de $(1\,;2\,;3)$.

Problème

On appelle f la fonction de deux variables réelles vérifiant $f(x\,;y) = \ln(yx - x^2)$, et on note $\mathcal{S}$ sa surface représentative dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$.

1.a. Représenter graphiquement l'ensemble de définition de f, que l'on notera D.

1.b. L'ensemble D est-il un convexe de $\mathbb{R}^2$? Justifier soigneusement la réponse.

1.c. Sans justification, dire si D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si D est un borné de $\mathbb{R}^2$.

2. À l'aide d'opérations sur les fonctions usuelles, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

3.a. Démontrer que le gradient de f ne s'annule en aucun point de D.

3.b. Déterminer les points de D en lesquels le gradient de f vaut $(0\,;2)$.

4.a. Vérifier le théorème de Schwarz en calculant les dérivées partielles secondes croisées.

4.b. Donner la hessienne de f en tout point $(x\,;y)$ de D.

On pose $A = (-1\,;-2\,;0)$ et on note $\mathcal{P}$ le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point A.

5.a. Donner une équation de $\mathcal{P}$.

5.b. Montrer que le hessien de f au point $(-1\,;-2)$ est égal à 1.

5.c. En déduire la position relative de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{S}$, au voisinage de A.

On introduit la fonction φ définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

6.a. Vérifier que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, le couple $(x\,;\varphi(x))$ est dans D.

6.b. Que vaut $f(x\,;\varphi(x))$ si x est un réel strictement positif ?

6.c. Calculer φ' et établir que pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)} \quad \text{avec } y = \varphi(x).$$

7.a. Donner l'expression de l'élasticité de φ et étudier le signe de cette élasticité.

7.b. Donner une approximation de la variation relative de $\varphi(x)$ lorsque x passe de 3 à 3,3.

7.c. Pour quelles valeurs de x l'élasticité de φ est-elle égale à 0,6 ?

Université Paris-Dauphine **Année** 2013-2014
UFR DEGEAD 1er cycle

Premier devoir de contrôle continu

Exercice 1 [4 points]

Soit u la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $u(x) = (2x^2 + 2x - 1)e^{-2x}$.

1. Expliquer pourquoi u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Préciser le signe de $u(x)$ en fonction des valeurs du réel x.

3. Déterminer les intervalles sur lesquels u est convexe ou concave.

Exercice 2 [4 points]

On considère une fonction g définie sur $[-1\,;1]$ et telle que :

$$\forall x \in [-1\,;1],\ x^4 \leqslant g(x) \leqslant x^2.$$

Que penser de chacune des affirmations suivantes ? Justifier.

1. La fonction g est dérivable en 1.

2. La fonction g vérifie $g(1) = 1$.

3. La fonction g est continue en 0.

4. La fonction g vérifie $g'(0) = 0$.

Exercice 3 [7,5 points]

Soit f la fonction de la variable réelle x vérifiant :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right).$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera $\mathscr{D}_f$.

2.a. Étudier les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$.

2.b. Quelles sont les droites asymptotes à la courbe représentative de f ?

3. Calculer la dérivée de f et montrer qu'elle est strictement négative.

4.a. Montrer que f est une bijection de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}^*$.

4.b. Calculer l'expression de la réciproque de f, notée f^{-1}.

4.c. Étudier la limite de f^{-1} en 0.

Exercice 4 [4,5 points]

On note φ la fonction définie pour tout x de $]-1\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(x+1) - x$.

1.a. Étudier le sens de variations de φ.

1.b. Quel est le signe de la fonction φ ? Justifier.

2. Étudier précisément les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) \qquad \lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)$$