Université Paris-Dauphine
UFR DEGEAD 1^{er} **cycle**

Année 2013-2014

Premier devoir de contrôle continu

Exercice 1 [4 points]

On note f la fonction définie pour tout x de $[-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur $]0\,;1]$.

2. Donner l'expression de la réciproque de f.

Exercice 2 [10 points]

Soit h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = x + \dfrac{1}{e^x+1}$. La courbe représentative de h est notée $\mathscr{C}_h$. On définit les trois droites suivantes :

$$\mathscr{D}_1 : y = x \qquad \mathscr{D}_2 : y = x+1 \qquad \mathscr{D}_3 : -3x+4y-2=0.$$

1. Expliquer pourquoi h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée de h puis montrer que, pour tout réel x, on a $h''(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$.

3.a. Sur quel intervalle la fonction h est-elle concave ? convexe ? Justifier.

3.b. Montrer que la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0 est la droite $\mathscr{D}_3$; à l'aide de la question précédente, préciser la position de $\mathscr{C}_h$ par rapport à $\mathscr{D}_3$.

4.a. Montrer que h est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4.b. Combien y a-t-il de réels x vérifiant $1+x+xe^x=0$? Justifier.

5. Démontrer que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_h$.

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_h$ ainsi que les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ dans le repère donné en ANNEXE.

Exercice 3 [3 points]

Étudier précisément chacune des limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+3}\right) \qquad \lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x}\right) \qquad \lim_{x\to2}\left(\frac{2-x}{5x-x^2-6}\right)$$

Exercice 4 [3 points]

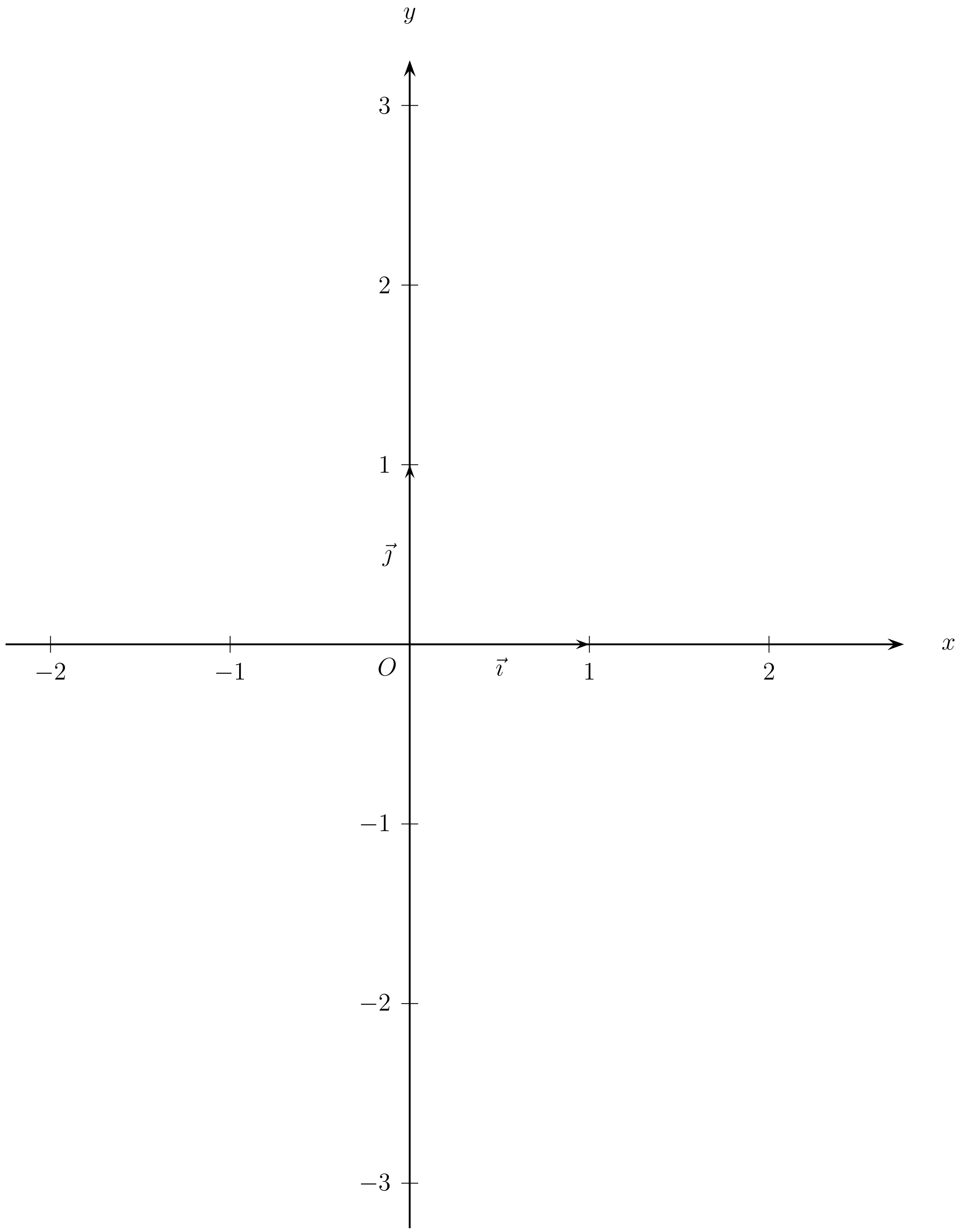
On considère la fonction φ définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -xe^{-x} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x\ln x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de φ sur $\mathbb{R}$, puis la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}$.

Prénom NOM : ______________________________

ANNEXE (à rendre avec la copie)



Université Paris-Dauphine
UFR DEGEAD 1^er^ cycle

Année 2013-2014

Premier devoir de contrôle continu (correction)

Exercice 1

1. Notons tout d'abord que la fonction donnée est bien définie : comme le discriminant du trinôme $X^2 + 2X + 2$ est égal à -4, la quantité $x^2 + 2x + 2$ est strictement positive quel que soit le réel x.

Remarquons qu'il est possible d'écrire :

$$\forall x \in [-1\,;+\infty[,\ f(x) = (x^2 + 2x + 2)^{\frac{-1}{2}}.$$

La fonction f est ainsi dérivable sur son ensemble de définition et nous avons :

$$\forall x \in [-1\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{-1}{2}(2x+2)(x^2 + 2x + 2)^{\frac{-3}{2}}.$$

Pour x dans $[-1\,;+\infty[$, le réel $2x + 2$ est positif et ne s'annule que pour $x = -1$. La dérivée de f est donc négative et ne s'annule qu'une seule fois. Ainsi, nous pouvons conclure :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } [-1\,;+\infty[.}$$

Comme la fonction f est continue, on peut affirmer que f réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur $f([-1\,;+\infty[)$.

On a $f(-1) = 1$; d'autre part, on a l'égalité :

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x + 2) = +\infty.$$

Comme la limite de la fonction racine carrée en $+\infty$ est égale à $+\infty$, nous obtenons par passage à l'inverse :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ réalise une bijection de } [-1\,;+\infty[\text{ sur }]0\,;1].}$$

2. Soit x dans $[-1\,;+\infty[$ et y dans $]0\,;1]$.

D'après la question précédente, il existe une unique solution x à l'équation $y = f(x)$, or nous avons :

$$y = f(x) \iff y^2 = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \text{ car } y \text{ est positif.}$$

$$y = f(x) \iff x^2 + 2x + 2 = \frac{1}{y^2} \text{ en passant à l'inverse.}$$

Nous pouvons ainsi écrire :

$$y = f(x) \iff x^2 + 2x + \left(2 - \frac{1}{y^2}\right) = 0.$$

Le trinôme du membre de droite possède un discriminant Δ vérifiant :

$$\Delta = 2^2 - 4\left(2 - \frac{1}{y^2}\right),$$

c'est-à-dire, après quelques transformations :

$$\Delta = \frac{4}{y^2}(1 - y^2).$$

Étant donné que y est dans $]0\,;1]$, le réel $1 - y^2$ est positif. Le discriminant Δ est ainsi positif et l'on peut écrire :

$$\sqrt{\Delta} = \frac{2}{y}\sqrt{1 - y^2}.$$

Ainsi, *a priori*, l'équation $y = f(x)$ est équivalente à :

$$x = \frac{-2 - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ ou } x = \frac{-2 - \sqrt{\Delta}}{2},$$

c'est-à-dire, après simplification :

$$x = -1 - \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} \text{ ou } x = -1 + \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

Néanmoins, la première de ces deux solutions n'appartient pas à $[-1\,;+\infty[$. Ainsi :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = -1 + \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f^{-1} \text{ est donc définie pour tout } y \text{ de }]0\,;1] \text{ par :} \\ f^{-1}(y) = -1 + \dfrac{\sqrt{1 - y^2}}{y}.\end{array}}$$

Exercice 2

1. La fonction exponentielle, la fonction linéaire $x \mapsto x$ et la fonction constante $x \mapsto 1$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, quel que soit le réel x, la quantité $e^x + 1$ est strictement positive. Ainsi, par somme et quotient :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. Quel que soit le réel x, nous avons :

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Afin de calculer la dérivée seconde de h, on dérive tel un quotient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = -\frac{e^x(e^x + 1)^2 - e^x \times 2(e^x + 1) \times e^x}{(e^x + 1)^4},$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = -\frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times 2 \times e^x}{(e^x + 1)^3}.$$

Après factorisation par e^x, nous obtenons la dérivée souhaitée :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}.}$$

3.a. Afin d'établir le caractère convexe ou concave de h, nous pouvons étudier le signe de h''. D'après la question précédente, le signe de $h''(x)$ est identique au signe de $e^x - 1$, quel que soit le réel x. Étant donné que, pour tout x de $\mathbb{R}$, nous avons :

$$e^x - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 0,$$

il est possible d'affirmer :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est concave sur }]-\infty\,;0] \text{ et est convexe sur } [0\,;+\infty[.}$$

3.b. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = h'(0)(x-0) + h(0).$$

En remplaçant par les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$, il vient :

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Une multiplication par 4 permet d'obtenir l'équation :

$$4y = 3x + 2.$$

$$\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C}_h \text{ au point d'abscisse 0 est donc bien la droite } \mathscr{D}_3.}$$

La question précédente assure que la fonction h change de concavité au point d'abscisse 0 ; ainsi, au point d'abscisse 0, la droite $\mathscr{D}_3$ traverse la courbe $\mathscr{C}_h$. Plus précisément :

$$\boxed{\mathscr{D}_3 \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_h \text{ sur }]-\infty\,;0] \text{ et } \mathscr{D}_3 \text{ est en dessous de } \mathscr{C}_h \text{ sur } [0\,;+\infty[.}$$

4.a. Transformons un peu la dérivée de h calculée à la question **2.** ; pour tout réel x, nous avons :

$$h'(x) = \frac{(e^x+1)^2 - e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}.$$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, il apparaît que h' est une fonction strictement positive ; ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Comme h est continue, on peut affirmer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R})$.

Calculons à présent les limites de h aux bornes de $\mathbb{R}$. Comme la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ vaut 0, nous avons :

$$\lim_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1,$$

et donc, par inverse :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) = 1.$$

Enfin, par somme avec la fonction $x \mapsto x$, il vient :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$$

De la même façon, comme la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ vaut $+\infty$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x + 1) = +\infty,$$

et donc, par inverse :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) = 0.$$

Enfin, par somme avec la fonction $x \mapsto x$, il vient :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

4.b. Comme h est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique réel x tel que $h(x) = 0$. Il existe donc un unique réel x tel que :

$$x + \frac{1}{e^x + 1} = 0,$$

c'est-à-dire tel que :

$$x(e^x + 1) + 1 = 0,$$

et donc finalement :

$$xe^x + x + 1 = 0.$$

$$\boxed{\text{Il existe donc un unique réel } x \text{ tel que } 1 + x + xe^x = 0.}$$

5. Avant toute chose, remarquons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) - x = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Pour démontrer que $\mathscr{D}_1$ est asymptote à $\mathscr{C}_h$ en $+\infty$, il suffit de démontrer :

$$\lim_{x \to +\infty} (h(x) - x) = 0.$$

Au sein de la question précédente, nous avons montré :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) = 0.$$

$$\boxed{\text{Nous pouvons donc affirmer que } \mathscr{D}_1 \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_h.}$$

De la même façon, afin de montrer que $\mathscr{D}_2$ est asymptote à $\mathscr{C}_h$ en $-\infty$, il suffit de prouver :

$$\lim_{x \to -\infty} (h(x) - x - 1) = 0.$$

Au sein de la question précédente, nous avons montré :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) = 1.$$

Par différence des limites, il vient donc :

$$\boxed{\text{la droite } \mathscr{D}_2 \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_h.}$$

6. Voir le tracé sur l'ANNEXE.

Exercice 3

1. Pour tout réel x, nous avons :

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x+3} = \frac{e^x\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)},$$

et donc :

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x+3} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{1+\frac{3}{e^x}}.$$

Étant donné que la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ vaut $+\infty$, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{e^x}\right) = 0,$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{e^x}\right) = 1.$$

Par opérations usuelles sur les limites, nous pouvons donc conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+3}\right) = +\infty.}$$

2. Notons f la fonction définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+3}$. Nous remarquons alors que, quel que soit le réel strictement positif x, on peut écrire :

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x} = \frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)}.$$

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et l'on a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

Il est donc possible d'affirmer :

$$f'(1) = \frac{1}{4},$$

et donc, par définition du nombre dérivé de f en 1 :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = \frac{1}{4.}$$

Il vient donc, à cause de la multiplication par (-1) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x} = \frac{-1}{4}.}$$

3. Quel que soit le réel x, on a $(x-3)(2-x) = 5x - x^2 - 6$. Ainsi, pour peu que x soit un réel différent de 2 et de 3, il est possible d'écrire :

$$\frac{2-x}{5x-x^2-6} = \frac{2-x}{(x-3)(2-x)}.$$

Après simplification, nous avons donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\,;3\},\ \frac{2-x}{5x-x^2-6} = \frac{1}{x-3}.$$

L'égalité suivante est vraie :

$$\lim_{x\to 2}(x-3) = -1.$$

Ainsi, par quotient, nous obtenons la conclusion :

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2-x}{5x-x^2-6}\right) = -1.}$$

Exercice 4

La fonction φ est continue sur $]-\infty\,;0[$ comme produit des deux fonctions continues que sont $x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^{-x}$. De même, la continuité de φ sur $]0\,;+\infty[$ ne pose pas de problème car les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues sur ce même intervalle.

Reste à étudier la continuité de φ en 0.

Nous avons $\varphi(0) = 0$; d'autre part, l'égalité suivante est vraie :

$$\lim_{x\to 0^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 0}(-xe^{-x}).$$

Comme nous avons, par produit usuel de limites :

$$\lim_{x\to 0}(-xe^{-x}) = 0,$$

nous pouvons conclure :

$$\lim_{x\to 0^-} \varphi(x) = \varphi(0).$$

La fonction φ est donc continue à gauche en 0.

De même, nous avons $\varphi(0) = 0$ et :

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0}(x\ln x).$$

La limite de droite est une limite dite de croissances comparées :

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x) = 0.$$

Il vient donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0).$$

La fonction φ est donc continue à droite en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

Procédons de même pour l'étude de la dérivabilité de φ. Les mêmes arguments que ceux invoqués pour la continuité s'adaptent et montrent que φ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Reste à étudier la dérivabilité de φ en 0.

Pour tout x de $]-\infty\,;0[$, nous avons :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = -e^{-x}.$$

Il vient donc facilement :

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right) = -1.$$

Par définition, la fonction φ est donc dérivable à gauche en 0 et l'on a $\varphi'_g(0) = -1$.

De même, si x est dans $]0\,;+\infty[$, nous avons :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \ln x.$$

Comme la limite de la fonction ln en 0 est égale à $-\infty$, nous avons :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right) = -\infty.$$

La fonction φ n'est donc pas dérivable à droite en 0.

$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*\text{ ; elle est dérivable à gauche en 0 mais pas à droite en 0.}}$

Prénom NOM : ____________________

ANNEXE (à rendre avec la copie)