Université Paris-Dauphine Année 2011–2012

DEGEAD 1er cycle

Soutien - Semaines 9 et 10

Exercice 1.(Test de janvier 2004 - Exercice 2.10) Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x,y) = x^2 e^{xy}, \quad g(x,y) = \ln(2 - \sqrt{x^2+y^2}).$$

Pour ces deux fonctions répondre aux questions suivantes.

1. Donner le domaine de définition. On admet que ce domaine est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ à définir.
3. Donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en un point quelconque du domaine de définition.
4. Écrire le développement limité à l'ordre 2 au point $(1,0)$.
5. Écrire l'équation du plan tangent au point $(1,0)$ et donner la position de la courbe par rapport à son plan tangent.

Exercice 2. (Exercice 2.24 - Test de janvier 2006) Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = -\ln(xy) - \ln(4 - (x^2+y^2)).$$

1. Donner $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f et en faire une représentation graphique.
2. Ce domaine est il convexe ? Borné ?
   On admet que le domaine de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(1,1)$.
5. Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative au voisinage de $(1,1)$.
6. Étudier la position du plan par rapport à la surface au voisinage de $(1,1)$.
7. Étudier la convexité sur son domaine de définition de la fonction suivante :
   $$h(x,y) = \ln(4 - (x^2+y^2)).$$
8. En déduire la convexité de f sur l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$. On vérifiera que c'est bien un ensemble convexe.