**Université Paris-Dauphine** Année 2011–2012
DEGEAD 1er cycle

## Soutien - Semaines 7 et 8

---

**Exercice 1.** Calculer les dérivées partielles premières (et secondes) des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = x^2 + 3xy - y^2,\ f_2(x,y) = x^4\, e^x,\ f_3(x,y) = 5^x + 2x(y+1),$$
$$f_4(x,y) = (x^2+1)\ \ln(1+y^2).$$

**Exercice 2.**(Exercice 2.25 du poly) Soit la fonction $f$ définie par $f(x,y) = x\,e^y + y\,e^x$.

1) Donner le domaine de définition de $f$.
2) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
3) Calculer le gradient de $f$ au point $(0,0)$.
4) Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $f$ au point $(0,0)$, puis déterminer l'équation du plan tangent au graphe de $f$ au point $(0,0,f(0,0))$.
5) Écrire l'approximation affine de $f$ au point $(0,0)$ et en déduire une valeur approchée de $f(0.1,-0.2)$.
6) Soit $a > 0$. On se place au point $A = (a,a)$. On suppose que les variables $x$ et $y$ augmentent toutes les deux de 5 %. En utilisant un calcul approché, déterminer $a$ pour que $f$ augmente de 10 %.

**Exercice 3.** (Examen de février 1999) On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x,y) = \ln(y)\,e^{x-2} + x + y.$$

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $f$ et montrer que $\mathcal{D}$ est un ouvert convexe.

2) (a) Montrer que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer ses dérivées partielles premières et secondes en un point quelconque de $\mathcal{D}$..
   (b) On se place au point $M_0 = (2,1)$. On suppose que la variation absolue $\Delta x$ de $x$ est le double de la variation absolue $\Delta y$ de $y$ et que $f$ augmente de $0,16$. En utilisant un calcul approché, calculer les variations absolues $\Delta x$ et $\Delta y$ qui ont provoqué ce changement.

(c) On se place toujours au point $M_0 = (2,1)$. Sachant que $x$ diminue de 3%, quelle doit être la variation relative de $y$ pour que $f$ augmente de 2% ? (On demande un calcul approché)

3) (a) Écrire le développement limité de $f$ à l'ordre 2 au voisinage de $(2,1)$.

(b) Écrire l'équation du plan tangent au graphe de $f$ au point $\big(2,1,f(2,1)$ et préciser la position du plan tangent au point $\big(2,1,f(2,1)\big)$ par rapport à la surface représentative de $f$ au voisinage du point $\big(2,1,f(2,1)\big)$.

(c) Soit

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < y \leqslant \frac{1}{e}\right\}.$$

i. Donner une représentation graphique de $\mathcal{E}$.

ii. Justifier que $\mathcal{E}$ est inclus dans $\mathcal{D}$ et que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.

iii. Montrer que $f$ est concave sur $\mathcal{E}$.