

Soutien- Semaine 3 - Test 1 Novembre 2006

- 1) Vérifier que la fonction ($x \mapsto \ln x$) est concave sur son ensemble de définition, et en déduire que

$$\forall x > 0, \ln x \leq x - 1.$$

Dans toute la suite, on étudie la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$.

- 2) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 3) Montrer que f est \mathcal{C}^2 sur son ensemble de définition, et calculer sa dérivée.
- 4) Écrire la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre 2 au point $x_0 = 1$. En déduire l'équation de la tangente en ce point et la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
- 5) Quelle est l'approximation affine de f au voisinage de 1 ? En déduire une valeur approchée de $f(1,01)$.
- 6) Montrer que f peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$. On note encore f son prolongement.
- 7) Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable à droite en 0. La dérivée est-elle continue à droite en 0 ?
- 8) Étudier les variations de f et tracer sommairement sa courbe représentative en indiquant les tangentes aux points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$. Déterminer les extrema, locaux et globaux, de f sur $]0, +\infty[$? Et sur $[0, +\infty[$?
- 9) En fonction des valeurs de y , discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$.