Soutien - Semaine 2

Exercice 1 (Test 1 - Décembre 2005 - 6 points). Soient a et b des réels quelconques vérifiant $a > 0$, $b > 0$, et la fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x^a \, e^{bx}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, et déterminer ses limites aux bords de l'intervalle.
2. Définir l'élasticité e_f de la fonction f et la calculer en fonction de x, a et b. Quel type de fonction obtient-on ?
3. Déterminer les réels a et b pour lesquels $f(1) = f'(1) = 2$. Ecrire dans ce cas particulier l'approximation affine de f au point 1, et en déduire une valeur approchée de $f(0,9)$.
4. On se place dans le cadre de la question 3. où $f(1) = f'(1) = 2$. Déterminer une valeur approchée de la variation relative de f lorsque x augmente de 2% à partir de $x = 1$.

Exercice 2. (Utilisation d'un développement limité d'ordre 1 pour le calcul d'une limite) Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Écrire le développement limité au premier ordre en 0.
2. En déduire $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.
3. Quelle est l'approximation affine de f en 0 ?
   On pose maintenant, pour $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$g(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}.$$
4. Déterminer la limite de g en 0.