

Soutien - Semaine 12

Examen de février 2005 - Problème Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 2y^3 - 3x - 3y$.

Partie I (5 points)

1. (a) Pour tout réel x , on pose $\varphi(x) = f(x, x)$. Donner l'expression de $\varphi(x)$.
- (b) Déterminer les limites de φ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. En déduire que f n'admet ni maximum global ni minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
- (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- (b) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
- (c) Déterminer la nature des points critiques trouvés à la question précédente.

Partie II (12 points) Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x^2 + y^2 - 50$. On cherche les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

1. Chercher les points critiques de seconde espèce de f sous la contrainte.
2. Déterminer les coordonnées des points critiques de première espèce et donner la valeur du multiplicateur de Lagrange pour chacun d'entre eux.

Indication : on trouve 6 points critiques de la forme $M_1 = (a, a)$, $M_2 = (-a, -a)$, $M_3 = (b, 7)$, $M_4 = (-b, -7)$, $M_5 = (b, -7)$ et $M_6 = (-b, 7)$, où a et b sont des entiers strictement positifs à déterminer.

3. (a) Pour tout couple (x, y) de réels, comparer les valeurs de $f(x, y)$ et $f(-x, -y)$.
- (b) Calculer la valeur prise par f en chaque point critique.
- (c) Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sous la contrainte.
- (d) Préciser les points pour lesquels ces extrema globaux sont atteints.

4. (a) Montrer que les points M_3 et M_4 donnent des extrema locaux pour le Lagrangien.
(b) En déduire la nature de ces points critiques pour f sous la contrainte.
5. (a) Vérifier que les points critiques non encore étudiés sont des points cols du Lagrangien.
(b) Linéariser la contrainte pour ces deux derniers points critiques.
(c) En déduire leur nature pour f sous la contrainte.