

Soutien - Semaines 11 et 12

Exercice 1 (Examen de février 2004) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2.$$

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Donner le gradient et la matrice hessienne de f en tout point.
2. (a) Vérifier que $(0, 0)$ est un point critique de f .
(b) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$. Peut-on conclure sur la nature du point critique $(0, 0)$?
(c) Exprimer en fonction de h la différence $f(h, h) - f(0, 0)$ à partir de l'expression de f et étudier son signe. Même question avec $f(h, 0) - f(0, 0)$. En déduire la nature du point $(0, 0)$.
(d) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. (a) On pose $\varphi(x) = x^3$. Montrer que la fonction φ est une bijection sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'égalité $a^3 = b^3$ pour a et b réels est vérifiée si et seulement si $a = b$.
(b) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
(c) Étudier la nature des points critiques obtenus à la question précédente. Donner les valeurs des extrema éventuels.
4. (a) Pour tous réels x et y calculer $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (x + y)^2 - 2$.
(b) En déduire que les extrema locaux de f sont globaux.
5. Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - 32.$$

- (a) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$. On admet que $\mathcal{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$.
- (b) Déterminer les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Exercice 2 Soit f la fonction de deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = x(\ln x)^2 + xy^2.$$

On note D le domaine de définition de f .

- 1) Expliciter D et montrer que c'est un sous-ensemble ouvert, convexe et non-borné de $\mathbb{R}^2$.
- 2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et calculer le gradient et la matrice hessienne de f en tout point de D .
- 3) Écrire le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(1, -1)$.
- 4) Déterminer l'équation du plan tangent au point $(1, -1)$ et sa position au voisinage de ce point par rapport au graphe de f en ce point.
- 5) Déterminer l'approximation affine de f au point $(1, -1)$ et en déduire une valeur approchée de $f(0.98, -0.9)$.
- 6) Déterminer tous les points critiques de f sur D et leur nature. Pour les extrema éventuels, on précisera s'ils sont, ou non, globaux.
- 7) Étudier la convexité ou la concavité de f sur D .

Exercice 3 On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1.$$

- 1) Tracer le tableau de variations de ϕ . En déduire les extrema de ϕ sur $\mathbb{R}$ et leur nature.

On considère maintenant les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 4x^3 + y^2 \text{ et } g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

On cherche à optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

- 2) Démontrer que la contrainte définit un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$.
- 3) Montrer qu'il n'existe pas de point critique de seconde espèce.
- 4) Trouver les six points critiques de première espèce en n'oubliant pas de préciser la valeur du multiplicateur de Lagrange en chaque point. On placera ces points sur la figure représentant la contrainte, qui est située au dos cette feuille.
- 5) Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sous la contrainte. Préciser la valeur de ces extrema et les points où ils sont atteints.
- 6) Former le lagrangien aux quatre points critiques restants. Montrer qu'en chacun de ces points le déterminant de la matrice hessienne $rt - s^2$ est nul.
- 7) En utilisant la première question, conclure à la nature des quatre derniers points critiques.