Université Paris-Dauphine Année 2009-2010

DEGEAD 1er cycle

Soutien - Semaine 11

Examen de février 2004 - Exercice 1 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2 \,.$$

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Donner le gradient et la matrice hessienne de f en tout point.

2. (a) Vérifier que $(0,0)$ est un point critique de f.

   (b) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0,0)$. En déduire une condition sur (h,k) au voisinage de $(0,0)$ pour laquelle on peut déterminer le signe de $f(h,k) - f(0,0)$.

   (c) Exprimer en fonction de h la différence $f(h,h) - f(0,0)$ à partir de l'expression de f. Quelle est le signe de cette différence ?

   (d) Quelle est la nature du point critique $(0,0)$?

   (e) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}^2$?

3. (a) On pose $\varphi(x) = x^3$. Montrer que la fonction φ est une bijection sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'égalité $a^3 = b^3$ pour a et b réels est vérifiée si et seulement si $a = b$.

   (b) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

   (c) Étudier la nature des points critiques obtenus à la question précédente. Donner les valeurs des extrema éventuels.

4. (a) Pour tous réels x et y calculer $(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + (x+y)^2 - 2$.

   (b) En déduire que les extrema locaux de f sont globaux.

5. Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = x^4 + y^4 - 32 \,.$$

   (a) Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x,y) = 0\}$. On admet que $\mathcal{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Déterminer les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.