Corrigé du test du 12 janvier 2007

Exercice 1. *Soit f définie par $f(x,y) = xe^y + ye^x$.*

1. *Donner le domaine de définition de f et calculer les dérivées partielles premières de f.*

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, la fonction $\big(t \mapsto e^t\big)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc par le lemme d'extension les fonctions $\big((x,y) \mapsto e^x\big)$ et $\big((x,y) \mapsto e^y\big)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Les deux projections sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc f est bien de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ comme produit et somme de telles fonctions. On peut donc calculer ses dérivées partielles premières (et secondes). On obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + y\,e^x$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,e^y + e^x.$$

$\big($On peut remarquer que f est symétrique en les variables x et y donc on obtient l'expression de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de celle de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en échangeant les rôles joués par x et $y\big)$.

2. *Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(0,0,f(0,0))$.*

$f(0,0) = 0$ et $\nabla f(0,0) = (1,1)$ donc l'équation du plan tangent est

$$z = x + y.$$

3. *Donner une valeur approchée de $f(0.1,-0.2)$.*

La valeur de $f(0.1,-0.2)$ est approchée par la valeur de l'approximation affine de f au même point. Or $\hat{f}_{(0,0)}(h,k) = h + k$ donc $f(0.1,-0.2) \simeq \hat{f}_{(0,0)}(0.1,-0.2) = -0.1$.

4. *Soit $a > 0$. On se place au point $A = (a,a)$. On suppose que les variables x et y augmentent toutes les deux de 5 %. En utilisant un calcul approché, déterminer a pour que f augmente de 10 %.*

On utilise l'approximation suivante pour la variation absolue de f :

$$\frac{\Delta f(a,a)}{f(a,a)} \simeq e_{f,x}(a,a)\,\frac{\Delta x}{a} + e_{f,y}(a,a)\,\frac{\Delta y}{a}. \tag{1}$$

Or l'élasticité partielle de f par rapport à x au point a vaut

$$e_{f,x}(a,a) = \frac{a}{f(a,a)}\,\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \frac{1+a}{2}.$$

De même $e_{f,y}(a,a) = \dfrac{a}{f(a,a)}\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,a) = \dfrac{1+a}{2}$ par symétrie des rôles joués par les variables x et y. En reportant dans (1) on trouve

$$\frac{10}{100} \simeq 2\,\frac{1+a}{2}\,\frac{5}{100}$$

donc $1+a=2$ *i.e.* a=1.

5. *Déterminer la position du plan tangent au graphe au point* $(0,0,f(0,0))$.

La position du graphe par rapport au plan tangent du graphe au point $(0,0,f(0,0))$ est donnée par le signe de la forme quadratique associée à la matrice hessienne au point $(0,0)$. On calcule donc les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y\,e^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x\,e^y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = e^y + e^x,$$

par le lemme de Schwarz puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$. La matrice hessienne au point $(0,0)$ vaut donc

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec la notation de Monge, son déterminant $rt - s^2 = -4$ est strictement négatif donc le graphe traverse le plan tangent en ce point.

6. *Etudier la convexité de f sur son ensemble de définition.*

On a vu à la question précédente que le graphe traverse le plan tangent au point $\big(0,0,f(0,0)\big)$, donc f n'est ni convexe ni concave.

Exercice 2. *Soit g définie par* $g(x,y) = \dfrac{\exp(x+y)}{\sqrt{x+y}}$.

1. *Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_g$.*

$$\mathcal{D}_g = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x+y > 0\big\}.$$

2. *Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_g$.*

g s'obtient par composition de la fonction $h : t \mapsto e^t/\sqrt{t}$ avec la fonction affine $\big((x,y) \mapsto x+y\big)$. Cette fonction affine est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et, sur $\mathcal{D}_g$, elle ne prend que des valeurs strictement positives. Sur $\mathbb{R}_*^+$, h est de classe $\mathcal{C}^2$ car c'est un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, l'exponentielle et la racine carrée, dont le dénominateur ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}_*^+$. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, g est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_g$.

3. *Etudier la convexité de g sur son ensemble de définition.*

Il est important d'abord de remarquer que $\mathcal{D}_g$ est un ensemble convexe car c'est un demi-plan. Nous allons proposer deux démonstrations différentes pour la convexité de g.
Première méthode : On va montrer que h est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc g sera une fonction convexe sur $\mathcal{D}_g$ comme composition d'une fonction affine et d'une fonction convexe. Pour cela nous devons montrer que $h''(t)$ est positive sur $\mathbb{R}_*^+$. Or

$$h'(t) = e^t\left[t^{-1/2} - \frac{1}{2}\,t^{-3/2}\right] = \frac{(2t-1)\,e^t}{2\,t^{3/2}}$$

puis $h''(t) = t^{-5/2}\,e^t\left[t^2 - t + \dfrac{3}{4}\right]$. On étudie le signe du trinôme $t^2 - t + \frac{3}{4}$ et on observe que le discriminant $\Delta = 1 - 4\left(\frac{3}{4}\right) = -2 < 0$. Ce trinôme est donc toujours positif sur $\mathbb{R}$. Donc $h'' > 0$ sur $\mathbb{R}_*^+$, et h est bien une fonction convexe.

Seconde méthode : On utilise le critère du cours qui dit que si u et v sont des fonctions strictement positives et que leurs logarithmes sont des fonctions convexes alors le produit $u\,v$ est une fonction convexe. On l'applique ici avec $u(x,y) = \exp(x+y)$ et $v(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$ qui sont positives strictement sur $\mathcal{D}_g$. D'une part, $\ln(u)$ est bien une fonction convexe car c'est la fonction affine $\big((x,y) \mapsto x+y\big)$. D'autre part, $\ln\big(v(x,y)\big) = \ln\big(\frac{1}{\sqrt{x+y}}\big) = -\frac{1}{2}\ln(x+y)$. Or le logarithme est une fonction concave sur $\mathbb{R}_*^+$, donc la fonction opposée est une fonction convexe et on la compose avec une fonction affine, donc $\ln(v)$ est bien une fonction convexe.

4. *Calculer les dérivées partielles du premier ordre de g sur $\mathcal{D}_g$.*

En utilisant la dérivée première de h calculée à la question précédente et la formule de dérivation des fonctions composées, on trouve

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{(2x+2y-1)\,e^{x+y}}{2\,(x+y)^{3/2}}.$$

Exercice 3. *Soit f définie par* $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2x-y^2}$.

1. *Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Est il convexe ?*

$$\mathcal{D}_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x - y^2 \neq 0\big\}.$$

Il s'agit du plan privé de la "parabole horizontale" d'équation : $x = y^2/2$. C'est ensemble n'est pas convexe : les points de coordonnées $(1,0)$ et $(-1,0)$ appartiennent à $\mathcal{D}_f$, mais leur milieu qui a pour coordonnées $(0,0)$ n'est pas dans $\mathcal{D}_f$.

2. *Déterminer et représenter la courbe de niveau C_k pour $k=1$.*

La courbe de niveau 1 est définie par

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \big\{(x,y) \in \mathcal{D}_f \ : \ f(x,y) = 1\big\} \\
&= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x - y^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad x^2 = 2x - y^2\big\} \\
&= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x - y^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1\big\}.
\end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1 privé de ses intersections éventuelles avec la parabole, c'est-à-dire privé de l'origine. En effet si $2x - y^2 = 0$ on reporte dans l'équation de la courbe de niveau et on trouve que $x^2 = 0$ donc $x = 0$, puis $y = 0$.

3. *Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}_f$.*

f est de classe $\mathcal{C}^2$ car c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annulle pas sur $\mathcal{D}_f$.

4. *Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(2x-y^2) - x^2(2)}{(2x-y^2)^2} = \frac{2x(x-y^2)}{(2x-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^2}{(2x-y^2)^2}$$

5. *Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f au point $(3,2)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(2.9, 2.2)$. Commenter votre résultat.*

$f(3,2)=\dfrac{9}{2}$ et $\nabla f(3,2)=\Big(-\dfrac{3}{2},9\Big)$. Donc

$$f(3+h,2+k)=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\,h+9k+\sqrt{h^2+k^2}\;\varepsilon(h,k),$$

où ε est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\varepsilon(0,0)=0$. L'approximation affine de f au point $(3,2)$ est donc

$$\hat{f}_{(3,2)}(3+h,2+k)=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\,h+9k.$$

On approche la valeur exacte de $f(2.9,2.2)$ par $\hat{f}_{(3,2)}(2.9,2.2)$, soit

$$f(2.9,2.2)\simeq\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\,(-0.1)+9\,(0.2)=4.5+0.15+1.8=6.45.$$

Cette valeur est "très éloignée" de la valeur de $f(3,2)=4.5$, on en déduit que l'approximation affine n'est pas pertinente dans ce cas.

6. *Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$. Vérifier que*

$$D^2f(3,2)=\begin{pmatrix}4 & -12\\ -12 & 81/2\end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2\,y^4}{(2x-y^2)^3},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{4\,x^3+6\,x^2y^2}{(2x-y^2)^3}.$$

Par le lemme de Schwarz, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, les deux dérivées croisées sont les mêmes et valent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{-4\,xy^3}{(2x-y^2)^3}.$$

On vérifie que l'on retrouve bien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2)=\frac{2\times 16}{8}=4,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,2)=\frac{4\times 27+6\times 9\times 4}{8}=\frac{81}{2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,2)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(3,2)\;=\;\frac{-4\times 3\times 8}{8}=-12.$$

7. *Ecrire le developpement limité d'ordre 2 de f au point $(3,2)$. En déduire l'équation du plan tangent et la position du graphe de f par rapport au plan tangent au point $(3,2)$.*

On a

$$f(3+h,2+k)=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\,h+9k+\frac{1}{2}\left[4\,h^2-24\,h\,k+\frac{81}{2}\,k^2\right]+(h^2+k^2)\;\varepsilon(h,k),$$

où ε est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\varepsilon(0,0)=0$. L'équation du plan tangent s'écrit : $z-\dfrac{9}{2}=-\dfrac{3}{2}\,(x-3)+9\,(y-2)$, soit

$$z=-\frac{3}{2}\,x+9\,y-9.$$

La position du graphe par rapport au plan tangent du graphe au point $(3,2,f(3,2))$ est donnée par le signe de la forme quadratique associée à la matrice hessienne au point $(3,2)$. Or, avec les notations de Monge, on a $rt-s^2=4\times\frac{81}{2}-144=18>0$ et $r=4>0$. Donc le graphe est au-dessus du plan tangent en ce point.