Université Paris-Dauphine
UFR GEA 1cycle
Année 2003-2004
UV 13 premier semestre
15 janvier 2004

Correction du contrôle n$^\circ$ 2

Exercice 1 Questions de cours :
Voir le cours

Exercice 2

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6, \quad g(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10.$$

1. Pour la fonction f on a $rt - s^2 = 0$.
   La fonction f est un polynôme du second degré de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Puisque $r > 0$, d'après le théorème du cours f est convexe.
   D'après les théorèmes généraux du cours g est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2x + 3y, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2,$$
   $$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4xy - 4y^3 + 3x + 2y, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 4x - 12y^2 + 2,$$
   $$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 4y + 3.$$
   La fonction g n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$ car $rt - s^2 = -5$ au point $(0,0)$.
2. On a $f(x,y) = (x+y)^2 + 6 \geqslant 6$. Donc la fonction f réalise son minimum global sur la droite d'équation $x + y = 0$ et son minimum global est égal à 6.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy).$$

1. On a pour g :
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x+y).$$
2. On a pour h :
   $$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^2), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2yf'(x^2+y^2).$$
3. On a pour k :
   $$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = yf'(xy), \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = xf'(xy).$$

Exercice 4

$$f(x,y) = x^2 e^{xy}, \quad g(x,y) = \ln(2 - \sqrt{x^2+y^2}).$$

Pour la fonction f :

1. On a $D(f) = \mathbb{R}^2$.
2. D'après les théorèmes généraux (voir le cours), la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
3. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x + x^2 y)e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2 + 4xy + x^2y^2)e^{xy},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^4 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (3x^2 + x^3 y)e^{xy}.$$
4. Le DL à l'ordre 2 au point $(1,0)$ est
$$f(1+h,k) = 1 + 2h + k + h^2 + \frac{1}{2}k^2 + 3hk + (h^2+k^2)\varepsilon(\sqrt{h^2+k^2}).$$
5. L'équation du plan tangent est
$$z = 2x + y - 1.$$
On a au point $(1,0)$, $rt - s^2 = 2 - 9 < 0$. Le plan tangent traverse la surface représentative de f.

Pour la fonction g on a :

1. On a $D(g) = B_O(0,2)$, la boule ouverte de centre O et de rayon 2.
2. D'après les théorèmes généraux (voir le cours), g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
3. On a
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}(2-\sqrt{x^2+y^2})}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(2-\sqrt{x^2+y^2})},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(2-\sqrt{x^2+y^2})} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}(2-\sqrt{x^2+y^2})} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)(2-\sqrt{x^2+y^2})^2},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(2-\sqrt{x^2+y^2})} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}(2-\sqrt{x^2+y^2})} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)(2-\sqrt{x^2+y^2})^2},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}(2-\sqrt{x^2+y^2})} - \frac{xy}{(x^2+y^2)(2-\sqrt{x^2+y^2})^2}.$$
4. Le DL de g à l'ordre 2 au point $(1,0)$ est
$$g(1+h,k) = -h + \frac{1}{2}(-h^2 - k^2) + (h^2+k^2)\varepsilon(\sqrt{h^2+k^2}).$$
5. L'équation du plan tangent au point $(1,0)$ est
$$z = -x + 1.$$
Au point $(1,0)$, on a $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$. La courbe est en dessous de son plan tangent.