
Examen de janvier 2013

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 Une entreprise produit 2 biens X et Y et les vend respectivement 5 et 10 euros. Le coût de production est donné par :

$$C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - xy - 4x + 2000$$

où les variables x et y représentent respectivement les quantités produites en bien X et Y . On suppose que la demande est plus forte que l'offre, c'est-à-dire que l'entreprise vend en totalité tous les biens qu'elle produit.

1. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, exprimer le profit P de l'entreprise en fonction des volumes de vente x et y .
2. La fonction P est-elle convexe, ou concave ?
3. L'entreprise peut produire au plus 40 produits par jour. Quelles sont les quantités de production de biens X et Y par jour optimales afin de maximiser le profit de l'entreprise dans le cas d'une production à plein régime ? Calculer dans ce cas le profit réalisé.
4. Pensez-vous que ce soit pertinent de tourner à plein régime ? Justifier votre réponse par des calculs.

Exercice 2 Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2)^2, \quad g(x, y) = (x - 1)^2 + 4y^2 - 4.$$

1. Justifier que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. En tout point de \mathbb{R}^2 , donner le gradient de f et sa matrice hessienne.
3. Donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(2, 1)$.
4. Donner une approximation à l'ordre 1 de $f(2.1, 0.9)$?
5. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(2, 1)$.
6. Quelle est la position du plan tangent par rapport au graphe de f au point $(2, 1)$?
7. Déterminer et tracer sur un dessin la courbe de niveau 1 de f , puis celle de niveau 4.
8. Dans cette question, on cherche les extrema de f sur \mathbb{R}^2 .
 - (a) Déterminer les points critiques de f sur \mathbb{R}^2 (attention, il y en a une infinité).
 - (b) Montrer que f admet une infinité de minima globaux.
9. On cherche les extrema de f sur la contrainte $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$.
 - (a) On admet que \mathcal{E} est fermé. Montrer qu'il est compact.
 - (b) Montrer qu'il n'y a pas de points critiques de seconde espèce.
 - (c) Trouver les 6 points critiques de première espèce sous contrainte.
 - (d) Déterminer la nature de chaque point critique.