

Examen du 2 février 2011, 9h–11h

Durée 2h. Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de la rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ne pas oublier de rendre l'énoncé avec la copie.

Exercice 1 Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = -\ln(x + y) + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{2y^3}{3}.$$

1. Déterminer et tracer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .
2. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition. Calculer le gradient et la matrice hessienne de f en tout point de $\mathcal{D}$.
3. On pose $\varphi(x) = f(x, 1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\varphi(x)$, et en déduire que f n'est ni majorée ni minorée sur $\mathcal{D}$.
4. Chercher les points critiques de f sur $\mathcal{D}$, puis préciser leur nature.
5. Montrer que $\mathcal{D}$ est un ensemble convexe. f est-elle convexe sur $\mathcal{D}$? concave sur $\mathcal{D}$?
6. On s'intéresse maintenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par :

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid y > \frac{1}{4}\}.$$

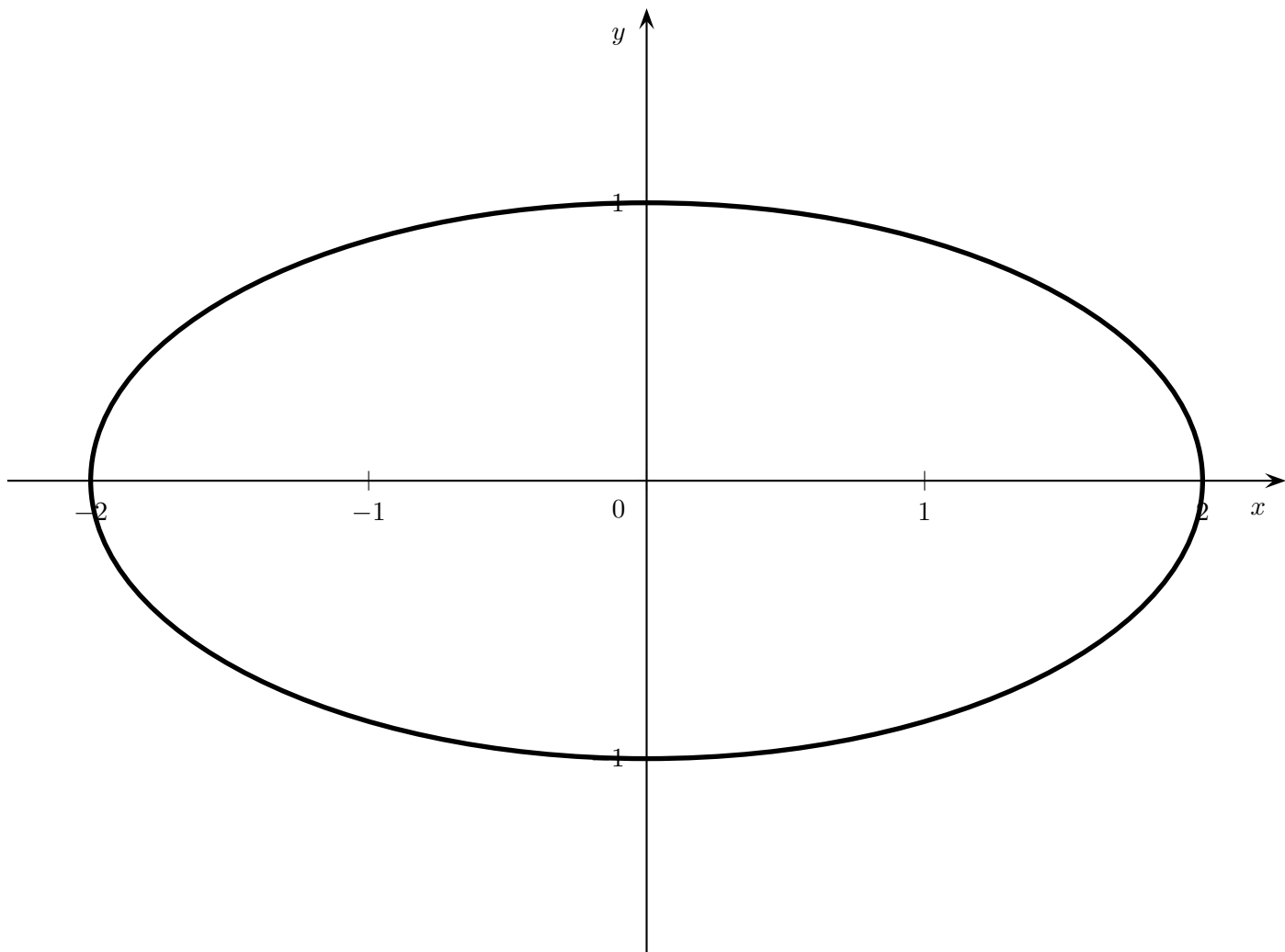
7. Tracer $\mathcal{E}$ sur le même dessin que $\mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.
8. Montrer que f est une fonction convexe sur $\mathcal{E}$.
9. Montrer que f atteint un minimum global sur $\mathcal{E}$ en un point que l'on précisera.
10. Écrire le développement limité d'ordre 2 de f au point $(0, 1)$.
11. En déduire l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(0, 1, f(0, 1))$ et la position du graphe par rapport au plan tangent au voisinage de ce point.
12. On suppose que x passe de 0 à 0.01 et que y passe de 1 à 0.98. De combien approximativement varie f ?

Exercice 2 Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x, y) = x^3 + 8y^3, \quad g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4.$$

1. Montrer que f a un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$, dont on précisera la nature.
On cherche les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$. La contrainte est une ellipse qui est tracée au verso du sujet. On admet que c'est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer, par un raisonnement mathématique, que la contrainte est un ensemble compact. Qu'en déduit-on pour l'optimisation de f sous la contrainte?
3. Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
4. Trouver les six points critiques de première espèce sous la contrainte $g(x, y) = 0$, sans oublier de préciser leur multiplicateur de Lagrange. Les placer sur le dessin.
5. Préciser la nature de chaque point critique.

T.S.V.P. →



Représentation graphique de la contrainte $g(x, y) = 0$