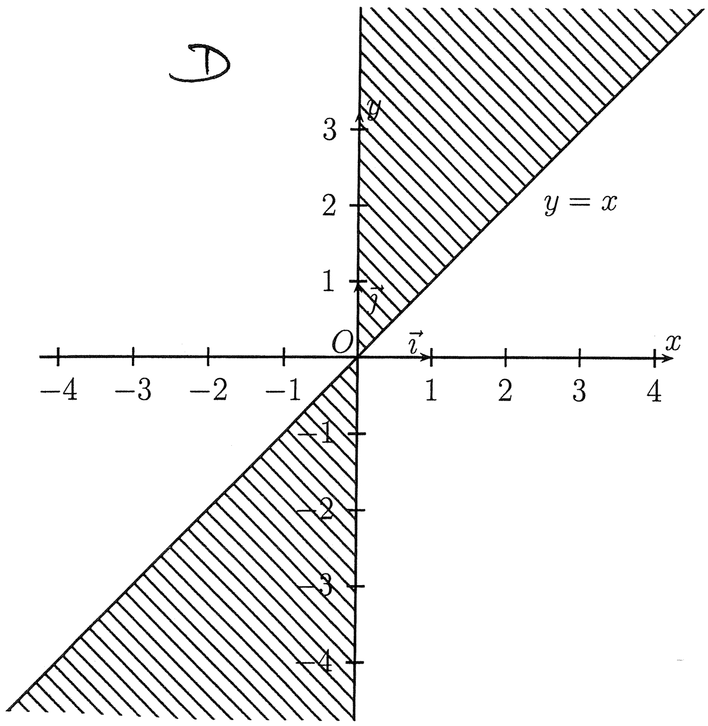
Exercice 1

1.a. L'ensemble de définition de f, noté D, est $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x(y-x) > 0\}$.

Ainsi $D = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x > 0 \\ y > x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < 0 \\ y < x \end{cases} \right\}$.

Une représentation graphique de D est la suivante.



1.b. On note $I = (1;2)$ et $J = (-1;-4)$.

I est dans D car $1 > 0$ et $2 > 1$

J est dans D car $-1 < 0$ et $-4 < -1$.

Le milieu K de $[IJ]$ est $K = (0;-1)$.

K n'est pas dans D car $0 \times (-1-0) \leq 0$.

On a ainsi exhibé deux points de D

tels que le segment reliant ces deux points n'est pas inclus dans D : <u>D n'est donc pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.</u>

1.c. D est un <u>ouvert</u> <u>non fermé</u> de $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction $\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y) \longmapsto x(y-x) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme <u>fonction polynôme</u> ; de plus, elle est <u>à valeurs dans $]0;+\infty[$</u>.

D'autre part, la <u>fonction ln</u> est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, <u>par composition</u>, <u>f est de classe $\mathcal{C}^2$</u>.

3.a. Pour tout $(x;y)$ de D, le gradient de f est le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) \, ; \, \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)$.

Or on a, pour $(x;y)$ dans D, après calculs :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{y-2x}{x(y-x)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \frac{1}{y-x}.}$$

On remarque : $\forall (x;y) \in D, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) \neq 0.$

Conclusion : $\vec{\nabla f}$ n'est jamais nul.

3. b. On cherche $(x;y)$ dans D tel que

$$\frac{y-2x}{x(y-x)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{y-x} = 2, \text{ c'est-à-dire}$$

tel que $\quad y = 2x \quad$ et $\quad 1 = 2y - 2x,$

i.e. $\quad y = 2x \quad$ et $\quad 1 = 4x - 2x;$

enfin $\quad y = 2x \quad$ et $\quad 1 = 2x.$

Conclusion : pour $(x;y)$ dans D, on a :

$$\boxed{\vec{\nabla f}(x;y) = (0;2) \iff (x;y) = \left(\frac{1}{2};1\right)}$$

4. a. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, f admet des dérivées partielles d'ordre 2 ; en particulier, on obtient, pour tout $(x;y)$

de D :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{1 \times (x(y-x)) - (y-2x) \times x}{x^2 (y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{xy - x^2 - yx + 2x^2}{x^2 (y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = \frac{1}{(y-x)^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{-(-1)}{(y-x)^2}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\forall (x;y) \in D, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y).$$

<u>Le théorème de Schwarz est vérifié.</u>

4. b. La hessienne de f au point $(x;y)$ de D est le tableau de nombres

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) \end{pmatrix}$$

or, pour tout $(x;y)$ de D, on obtient, après calculs non détaillés ici :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = \frac{-2x^2 - y^2 + 2xy}{x^2(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = \frac{-1}{(y-x)^2}$$

<u>Conclusion</u> : pour $(x;y)$ dans D :

$$(D^2 f)(x;y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2x^2 - y^2 + 2xy}{x^2(y-x)^2} & \dfrac{1}{(y-x)^2} \\ \\ \dfrac{1}{(y-x)^2} & \dfrac{-1}{(y-x)^2} \end{pmatrix}$$

5. a. Dans le cas **général**, une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(x_0 ; y_0 ; f(x_0 ; y_0))$ est

$$\boxed{z = f(x_0 ; y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 ; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 ; y_0)(y - y_0)}$$

En appliquant cette formule, on obtient :

$$P : \quad z = f(-1 ; -2) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1 ; -2)(x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1 ; -2)(y+2)$$

Or

$$f(-1 ; -2) = \ldots = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1 ; -2) = \ldots = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1 ; -2) = \ldots = -1$$

De là :

$$P : \quad z = -y - 2$$

Une équation de P est $y + z + 2 = 0$.

5. b. Le hessien de f en $(-1 ; -2)$ est

égal au <u>déterminant de la hessienne</u>

de f en $(-1;-2)$.

On a, en utilisant les notations de Monge,

$$r = \frac{-2\times(-1)^2-(-2)^2+2\times(-1)\times(-2)}{(-1)^2(-2-(-1))^2} = -2$$

$$s = \frac{1}{(-2-(-1))^2} = 1$$

$$t = \frac{-1}{(-2-(-1))^2} = -1$$

Or $\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 = 1$

<u>ce qu'il fallait démontrer</u>.

5. c. On est dans le cas où $\underline{\underline{rt - s^2 > 0}}$

et $\underline{\underline{r < 0}}$: <u>P est donc au-dessus</u>

<u>de S</u> au voisinage de A.

6.a. On a $x > 0$

et $x + \dfrac{1}{x} > x$

donc $\underline{(x\,;\,\varphi(x)) \in D \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^*}$.

6.b. Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$.

On a $f(x\,;\,\varphi(x)) = \ln(x(\varphi(x) - x))$

$f(x\,;\,\varphi(x)) = \ln(x(x + x^{-1} - x))$

$f(x\,;\,\varphi(x)) = \ln(x x^{-1})$

$f(x\,;\,\varphi(x)) = \ln 1$

$$\boxed{\underline{\underline{\text{Conclusion}}} : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x\,;\,\varphi(x)) = 0}$$

6.c. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \underline{\underline{\varphi'(x) = 1 - x^{-2}}}$.

D'autre part, pour $(x\,;\,y)$ dans D :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;\,y) = \frac{y - 2x}{x(y - x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;\,y) = \frac{\varphi(x) - 2x}{x(\varphi(x) - x)}$$

Ainsi : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x; \varphi(x)) = \dfrac{x^{-1} - x}{x \times x^{-1}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; \varphi(x)) = x^{-1} - x$$

De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = \frac{1}{y - x}$$

et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x; \varphi(x)) = \dfrac{1}{x^{-1}} = x$

De là :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x; \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x; \varphi(x))} = \frac{x^{-1} - x}{x}$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x; \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x; \varphi(x))} = x^{-2} - 1$$

<u>Conclusion</u> :

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\quad \varphi'(x) = - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x; \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x; \varphi(x))}$.

7.a. Pour x dans $]0,+\infty[$, on a :

$$e_\varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \times x$$

$$\boxed{e_\varphi(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{après calculs.}}$$

Le signe de $e_\varphi(x)$ est celui du polynôme du second degré x^2-1, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$. Ce polynôme ayant pour racines 1 et -1, on a le tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
signe de $e_\varphi(x)$		$-$	0	$+$	

7.b. L'élasticité de φ en x donne une bonne approximation du quotient de la variation relative de $\varphi(x)$ par la variation relative de x.

Dire que x passe de 3 à 3,3, c'est dire que la <u>variation relative de x est de 10%</u>. On a ainsi

$$e\varphi(3) \approx \frac{v}{10\%}$$

où v est la variation relative cherchée

$$\frac{8}{10} \approx \frac{v}{10\%}$$

De là : $v = 8\%$

$\boxed{\text{$\varphi(x)$ varie de $+8\%$ quand x varie de $+10\%$ à partir de 3.}}$

7.c. Il s'agit de trouver x dans $]0;+\infty[$ tel que $\underline{\underline{e\varphi(x) = 0,6}}$, c'est-à-dire tel que $x^2 - 1 = 0,6\,(x^2+1)$, i.e. $0,4\,x^2 = 1,6$, ou encore : $x^2 = 4$.

Conclusion : $\underline{\underline{e\varphi(x) = 0,6 \iff x = 2}}$.

Exercice 2

La quantité réelle $y^2 - x^2 + \ln(x^2)$ n'est définie que si $\underline{x^2 > 0}$, c'est-à-dire si $x \neq 0$. L'ensemble de définition de f est donc $\underline{\underline{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition et pour tout $(x;y)$ de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a, après calculs :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) &= \frac{2}{x} - 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) &= 2y \end{aligned}}$$

En particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(1;2) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1;2) = 4$.

Une équation du plan demandé est donc

$z = 3 + 4(y-2)$, c'est-à-dire

$$\underline{\underline{4y - z - 5 = 0}}$$

De plus, pour tout $(x;y)$ de $\mathcal{D}$:

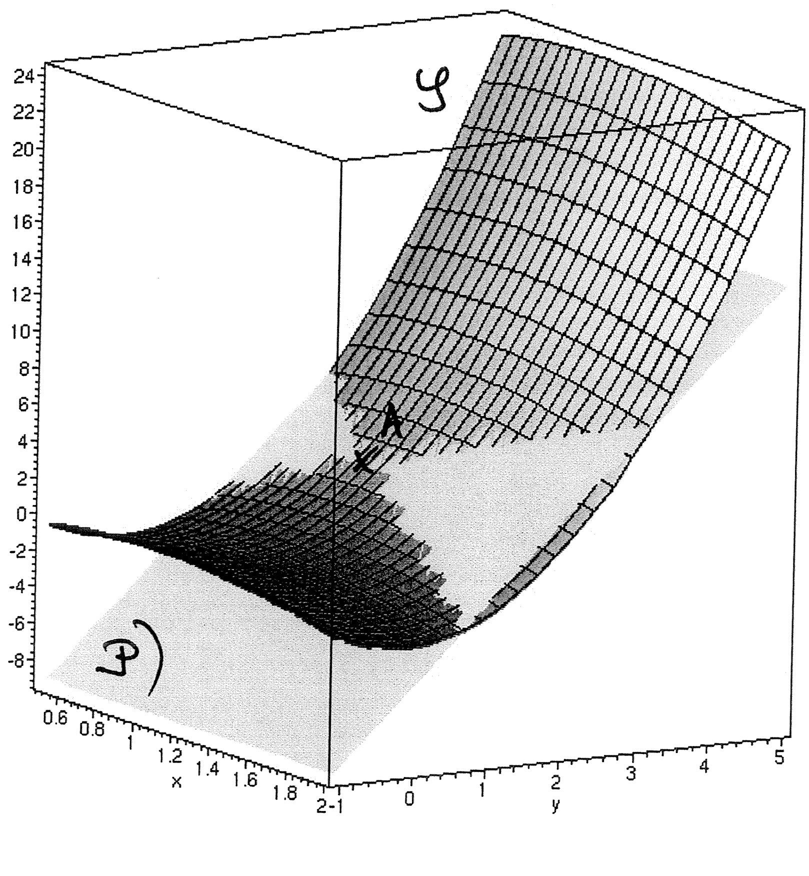
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = -\frac{2}{x^2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 2.$$

Ainsi, au point $(1;2)$, en utilisant les notations de Monge : $r = -4$, $s = 0$, $t = 2$.

De là $\underline{\underline{rt - s^2 = -8 < 0}}$: le plan tangent $\underline{\underline{\text{traverse}}}$ la surface représentative.



$\mathcal{P}$: $4y - z - 5 = 0$

$\mathcal{S}$: $z = f(x;y)$

<u>Représentation</u>